

École Centrale de Marseille
ECM

Hydrodynamique Marine

Deuxième partie : hydrodynamique des structures offshore



Bernard MOLIN

O.G.D. : Mécanique
P.G.D. : Génie Mer

3ème année
2006/2007

Table des matières

1	INTRODUCTION	1
1.1	Les structures offshore	1
1.2	Classification des structures offshore	8
1.2.1	Grands corps et petits corps	8
1.2.2	Types de comportements et de sollicitations	11
1.2.3	Méthodologies de calcul du comportement hydrodynamique	15
1.3	Organisation du cours	17
2	ENVIRONNEMENT	20
2.1	La houle	20
2.1.1	La notion d'état de mer	20
2.1.2	L'analyse vague par vague	21
2.1.3	L'analyse spectrale	22
2.1.4	Statistiques à court terme	23
2.1.5	Quelques spectres usuels	33
2.1.6	Statistiques à long terme	38
2.2	Le vent	41
2.2.1	Variation de la vitesse du vent avec l'altitude	42
2.2.2	Variation de la vitesse de vent avec la durée de référence	43
2.2.3	Spectres des fluctuations de vitesses	43
2.2.4	Définition des valeurs de design	45
2.3	Le courant	45
2.4	Les ondes internes	45
2.5	Variation du niveau moyen	47
2.6	Combinaison des valeurs de design	47
3	MODELISATION DE LA HOULE	48
3.1	Equations générales	50
3.2	Premier ordre d'approximation	52
3.2.1	Houle régulière (Airy)	52
3.2.2	Houle irrégulière (multichromatique)	61
3.2.3	Validité de l'approximation de premier ordre	62
3.2.4	Les modèles de stretching	64
3.3	Deuxième ordre d'approximation	66
3.3.1	Houle régulière (Stokes ordre 2)	69
3.3.2	Houle bichromatique	70
3.3.3	Houle irrégulière	72

3.4	Troisième ordre d'approximation	76
3.4.1	Houle régulière (Stokes ordre 3)	76
3.4.2	Houle multichromatique	78
3.5	La houle régulière à l'ordre N	79
3.6	Evolution non linéaire de la houle	82
4	LES PETITS CORPS	91
4.1	Théorie potentielle	92
4.1.1	Cylindre fixe dans un écoulement	92
4.1.2	Cylindre en mouvement dans un fluide au repos	93
4.1.3	Généralisation	93
4.2	Cylindre dans un courant	94
4.2.1	Effet de l'inclinaison	98
4.2.2	Cylindre rugueux	98
4.2.3	Cylindres de section non circulaire	98
4.2.4	Effets tridimensionnels	99
4.2.5	La portance	100
4.2.6	Effets de proximité	103
4.2.7	Cylindre à proximité du fond marin	105
4.3	Cylindre en écoulement oscillant. La formule de Morison	106
4.3.1	Coefficient de traînée à bas K_C	109
4.3.2	Cylindres de section non circulaire	112
4.3.3	Cylindre à proximité du fond marin	113
4.3.4	Cylindre en écoulement orbital	113
4.4	Cylindre circulaire en écoulement sinusoïdal + courant	113
4.4.1	Cas colinéaire	113
4.4.2	La stabilité des pipelines	116
4.4.3	Cas perpendiculaire	117
4.5	Vibrations induites par les écoulements	121
4.5.1	Vibrations induites par le détachement tourbillonnaire	122
4.5.2	Réduction des vibrations induites	127
4.5.3	Instabilités in-line	129
4.5.4	Le galop	130
4.6	La formule de Morison généralisée	132
5	LES GRANDS CORPS : THEORIE LINEAIRE	136
5.1	Introduction	136
5.2	Réponse linéaire sur houle régulière	140
5.2.1	Périodes propres	141
5.2.2	Le problème numérique de diffraction-radiation	142
5.3	Méthodes de résolution	144
5.3.1	Méthodes (quasi) analytiques	144
5.3.2	Méthodes numériques	155
5.3.3	Les méthodes approchées	157
5.4	Cas de plusieurs corps	161
5.5	Réponse sur houle irrégulière	162
5.6	Résolution temporelle directe des équations du mouvement	163

5.7	Validité et limitations de la théorie linéaire	164
5.7.1	Efforts sur les structures fixes	165
5.7.2	Réponse à la houle des structures flottantes	165
6	LES GRANDS CORPS : EFFETS DE DEUXIEME ORDRE	171
6.1	Introduction	171
6.2	Efforts de dérive sur houle régulière	172
6.2.1	Efforts moyens sur une digue	172
6.2.2	Effort de dérive sur un cylindre vertical	174
6.2.3	Efforts de dérive sur une structure flottante	175
6.2.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux	179
6.2.5	Effets visqueux	181
6.2.6	Effet du courant	182
6.3	Efforts de fréquence double sur houle régulière	189
6.4	Efforts de deuxième ordre sur houle bichromatique	195
6.4.1	Efforts de deuxième ordre en mode somme	196
6.4.2	Efforts de deuxième ordre en mode différence	196
6.5	Efforts de deuxième ordre sur houle irrégulière	197
6.6	Comportement d'ancrage	200
6.6.1	La méthode traditionnelle de dimensionnement des ancrages	200
6.6.2	Prise en compte du mouvement de dérive lente	203
6.7	Les amortissements des mouvements de dérive lente	205
6.7.1	L'amortissement de dérive	207
6.7.2	L'amortissement dû aux lignes d'ancrage	209
6.7.3	Amortissement visqueux sur la carène	211
A	HYDROSTATIQUE	219
A.1	Corps complètement immergé	219
A.1.1	Expression du rappel hydrostatique	219
A.1.2	Stabilité	221
A.2	Corps perçant la surface libre	222
A.2.1	Courbes de stabilité	223
A.2.2	Rappel hydrostatique linéarisé	225
B	SYSTEME MASSE RESSORT AMORTI	232
B.1	Cas sans excitation	232
B.2	Réponse sous excitation harmonique	233
B.2.1	$\omega \ll \omega_0$ (système raide) :	233
B.2.2	$\omega \gg \omega_0$ (réponse inertielle) :	234
B.2.3	$\omega \simeq \omega_0$ (résonance) :	234
B.3	Réponse à une excitation aléatoire	234
C	NOMENCLATURE	236

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Les structures offshore

Les structures offshore sont extrêmement variées. Cette diversité résulte des différentes fonctions qui leur sont assignées (reconnaissance sismique, forage, transport, production, stockage, assistance, pose de pipes, levage, etc.), de la gamme étendue des charges en tête (quelques centaines à quelques dizaines de milliers de tonnes), de la variabilité des conditions d'environnement prévalant sur les sites où elles opèrent : profondeur d'eau (de quelques mètres à plus de mille mètres), force des vagues (plus de trente mètres de crête à creux pour les vagues centenales de la mer du Nord, contre sept à huit mètres dans le golfe de Guinée), des vents, du courant, icebergs dérivants, séismes, etc., et de l'imagination sans limite des concepteurs.

On s'intéressera ici surtout aux supports de production, dont certains sont rassemblés sur la figure 1.1. Par leur variété, ils sont représentatifs de l'ensemble des structures pétrolières offshore et de la plupart des problèmes hydrodynamiques qui peuvent se poser aux concepteurs.

On fera donc souvent référence aux structures suivantes :

- *jackets*: plates-formes treillis métallique posées (clouées) sur le fond marin (figure 1.2)
- plates-formes auto-élevatrices de production (figure 1.3)
- GBS (*Gravity Base Structures*), plates-formes gravitaires en béton (figure 1.4)
- FPSO (*Floating Production Storage Offloading*), supports flottants de production de type barge ou tanker reconverti, sur «touret» (figure 1.5) ou en *spread-mooring* (figure 1.6)
- plates-formes semi-submersibles (figure 1.7)
- plates-formes sur lignes tendues ou TLP (*Tension Leg Platforms*) (figure 1.8)
- structures flottantes à grand tirant d'eau, SPAR (figure 1.9)
- tours souples (figure 1.10)

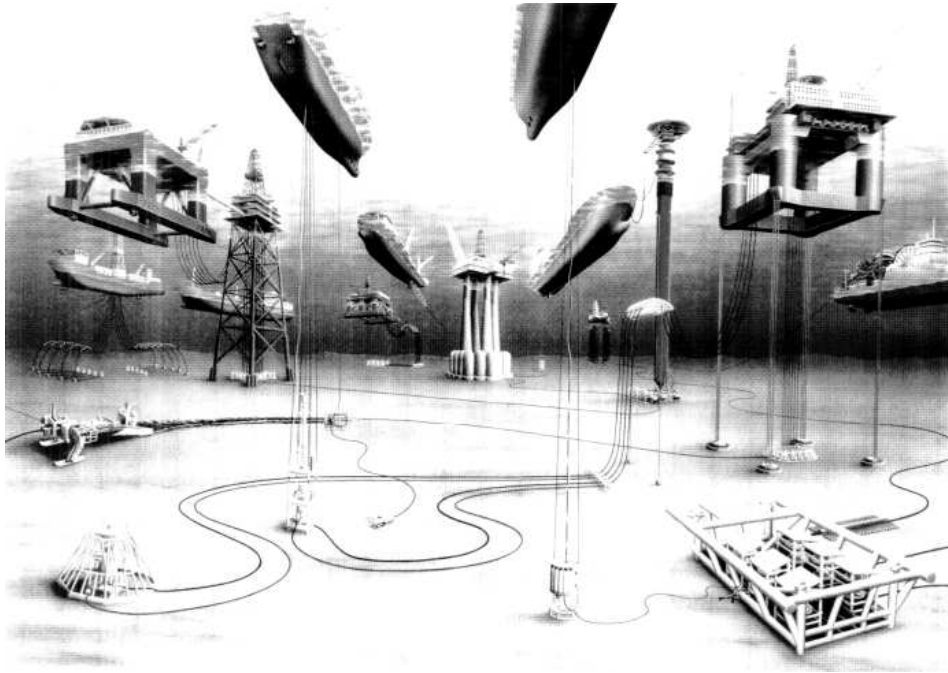


FIG. 1.1 – *Quelques supports de production offshore.*



FIG. 1.2 – *Le jacket de Bullwinkle en cours de remorquage.*



FIG. 1.3 – *La plate-forme auto-élevatrice de production de Elgin.*



FIG. 1.4 – *La plate-forme gravitaire de Troll en cours de remorquage.*



FIG. 1.5 – *Le FPSO de Norne en mer du Nord.*

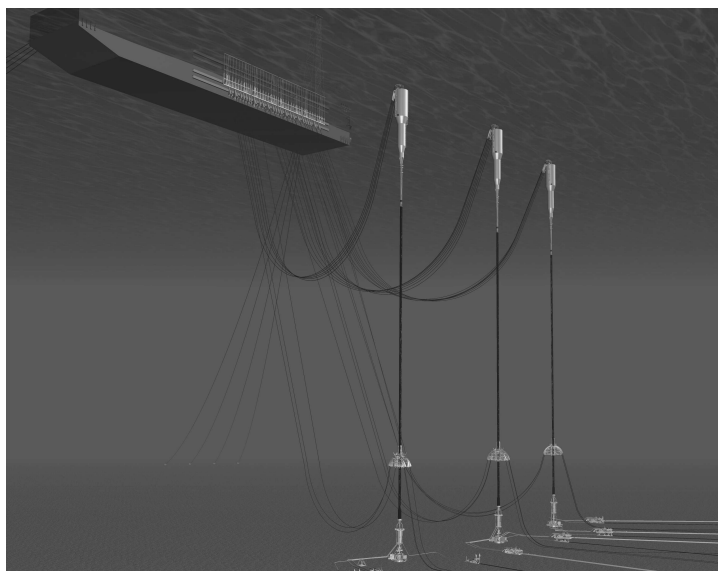


FIG. 1.6 – *Le FPSO de Girassol avec ses riser-towers.*



FIG. 1.7 – *La plate-forme semi-submersible de production de Troll Olje.*

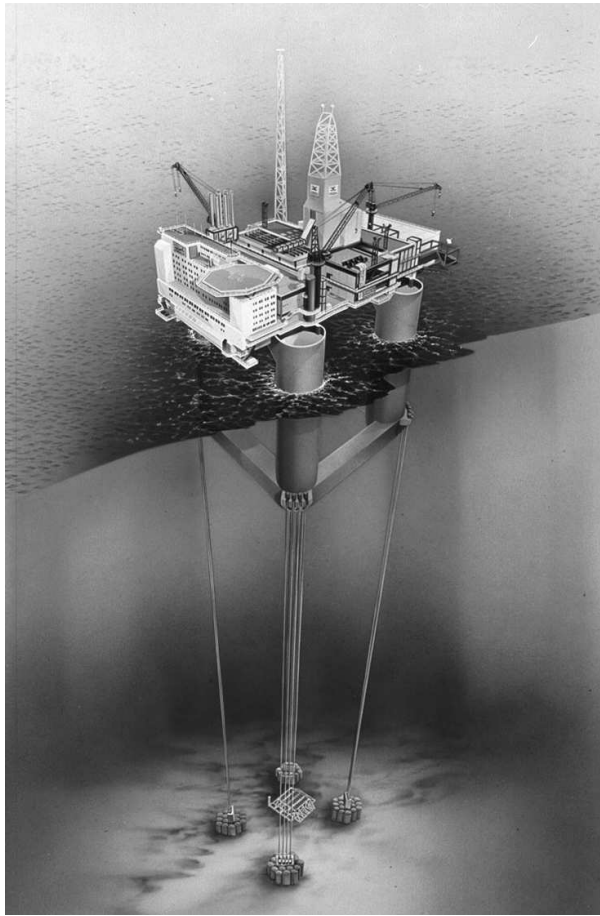


FIG. 1.8 – La plate-forme sur lignes tendues de Heidrun en mer du Nord.



FIG. 1.9 – Plate-forme SPAR en cours de remorquage.

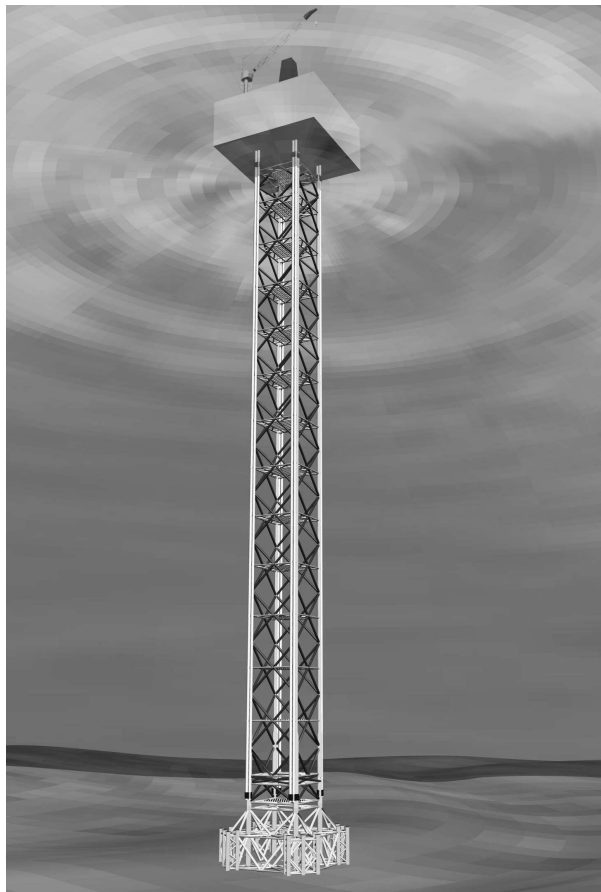


FIG. 1.10 – *Tour souple.*

On peut trouver de nombreuses descriptions, illustrées, de supports de production, sur des sites web comme www.offshore-technology.com/ (rubrique "Industry projects").

Comment catégoriser, sur le plan hydrodynamique, des structures aussi différentes?

On peut introduire deux classifications basées, l'une sur des considérations géométriques, l'autre sur des considérations mécaniques.

1.2 Classification des structures offshore

1.2.1 Grands corps et petits corps

Parmi les éléments constitutifs des structures offshore, il est une forme géométrique assez récurrente : le cylindre de section circulaire. Ce sont les barres des jackets, dont le diamètre est de l'ordre du mètre, les risers (quelques dizaines de centimètres), les câbles d'ancrage (quelques centimètres) et, à l'autre extrême, les piles ou colonnes des plates-formes semi-submersibles, TLP, plates-formes gravitaires dont le diamètre va de dix à trente mètres.

Ces éléments cylindriques sont soumis à l'écoulement induit par la houle et le courant.

Si l'on considère l'action du courant seul sur une forme cylindrique, on a, inévitablement, décollement de la couche limite et formation d'un sillage, laminaire ou turbulent suivant la valeur du nombre de Reynolds $Re = U_C D/\nu$, U_C étant la vitesse du courant, D le diamètre et ν la viscosité cinématique ($\nu \simeq 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$) (figures 1.11 et 1.12). Avec $U_C \sim 1 \text{ m/s}$, les nombres de Reynolds qui nous intéressent en pratique vont de 10^4 pour un câble ou ombilical de 10 mm de diamètre à 10^7 pour un diamètre de 10 m. On verra au chapitre 4 que c'est pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^5 que l'écoulement est le plus complexe, la transition du régime laminaire au régime turbulent se produisant alors à la paroi ou dans le sillage proche du cylindre.

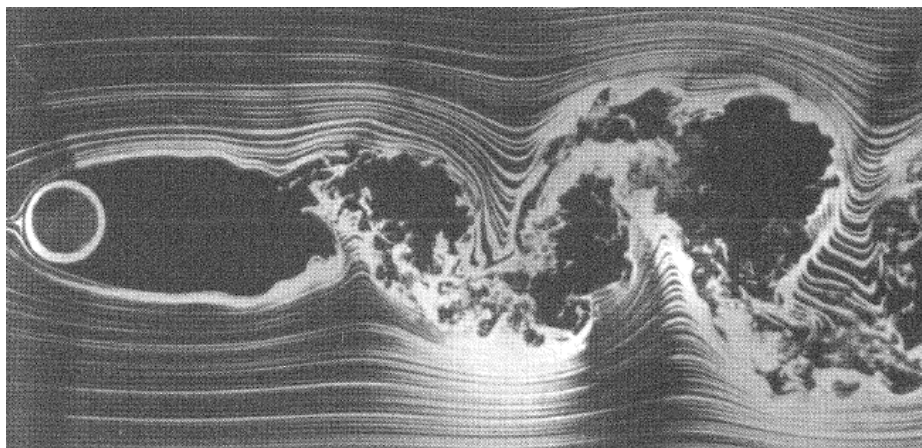


FIG. 1.11 – *Écoulement sur un cylindre circulaire dans un courant. $Re = 10\,000$.*

Malgré la simplicité géométrique du problème, la modélisation numérique de l'écoulement autour d'un cylindre est très ardue. L'état de l'art est la résolution numérique des équations

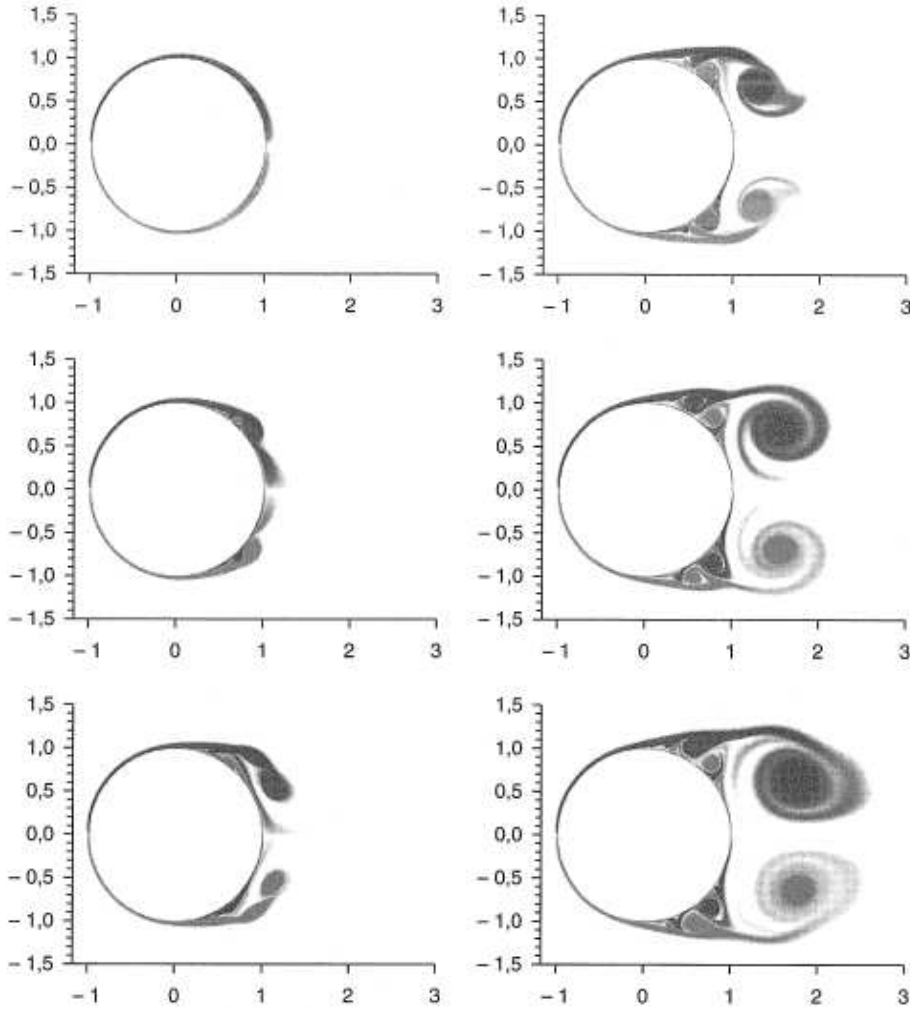


FIG. 1.12 – *Calcul Navier-Stokes à $Re = 9500$. Le fluide est au repos et l'écoulement démarre brutalement à $t = 0$. Les clichés successifs montrent le rotationnel de l'écoulement à des instants $U_C t/D$ allant de 0,5 à 3 par pas de 0,5. La couche limite décolle lorsque l'écoulement incident a parcouru entre 0,5 et 1 diamètre.*

de Navier-Stokes, avec un modèle de turbulence plus ou moins approprié, et de grandes difficultés à coller à l'expérience en régime dit critique.

L'écoulement induit par la houle diffère fondamentalement d'un courant, en ce qu'il se renverse au rythme du passage des vagues. Si l'on considère une pile verticale soumise à une houle régulière, et que l'on isole une tranche de cette pile à une certaine immersion, la situation présente une forte similarité avec le problème plan d'un cylindre soumis à un écoulement de vitesse $A \omega \cos \omega t$. L'expérience montre qu'un paramètre fondamental est le rapport A/D de l'amplitude du mouvement des particules fluides A au diamètre D .

Lorsque l'amplitude est grande devant le diamètre, l'écoulement présente une certaine ressemblance avec celui observé en courant seul : un sillage est émis à chaque demi-cycle et convecté au loin. La complication est que, lorsque l'écoulement se renverse, le sillage revient

sur le cylindre. A nouveau cela signifie que de la vorticité et de la turbulence se répandent dans le fluide et que la seule voie possible pour la modélisation numérique est la résolution des équations de Navier-Stokes.

A l'inverse, lorsque le rapport A/D est petit, les particules fluides à la paroi ne parcourent pas une distance suffisante, vis à vis du diamètre, pour que la couche limite décolle. L'ordre de grandeur de l'épaisseur de cette couche limite est $\sqrt{\nu/\omega}$, soit, pour des périodes de houle $T = 2\pi/\omega$ de 5 à 20 secondes, 1 à 2 millimètres. Donc, dans la plupart des cas pratiques, tout à fait négligeable.

L'écoulement extérieur est alors bien représenté par une théorie d'écoulement irrotationnel de fluide parfait, les mêmes lignes de courant étant parcourues de gauche à droite ou de droite à gauche suivant le sens de l'écoulement (figure 1.13).

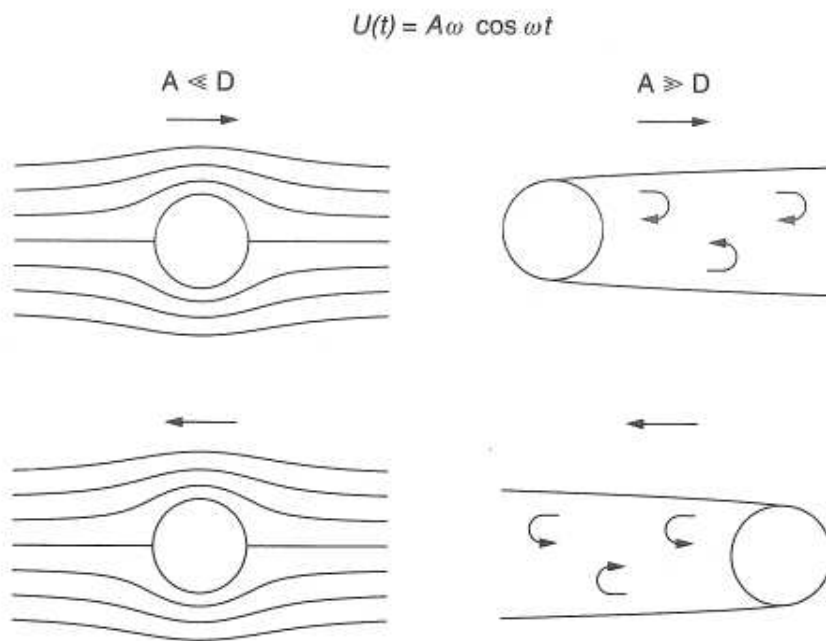


FIG. 1.13 – Cylindre circulaire en écoulement oscillant. Cas limites $A \ll D$ (gauche) et $A \gg D$ (droite).

Plutôt que le simple rapport A/D , on utilise comme paramètre discriminant le nombre dit de Keulegan-Carpenter $K_C = 2\pi A/D$. La limite entre écoulement attaché ou décollé dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement, souvent ramené au paramètre $\beta = D^2/(\nu T)$, donc principalement du diamètre. Dès que celui-ci est supérieur au mètre, la séparation ne se produit que lorsque K_C excède 4 ou 5. Si l'on se réfère à une pile de plate-forme semi-submersible de diamètre 20 m, $K_C = 5$ signifie une amplitude de houle A voisine de 15 m, soit donc pratiquement celle de la vague centennale en mer du Nord.

Il apparaît donc licite d'aborder la modélisation de l'interaction de la houle avec les structures massives via une théorie d'écoulement irrotationnel de fluide parfait : la théorie potentielle. Les dimensions caractéristiques de ces «grands corps» sont grandes devant les amplitudes de houle, donc souvent comparables aux longueurs d'onde. Il en résulte que la houle incidente est appréciablement modifiée par son interaction avec la structure : c' st le

phénomène de diffraction. Si la structure «répond» à la houle, elle rayonne, par son mouvement, un champ de vagues : c'est le phénomène de «radiation». Moyennant quelques hypothèses simplificatrices sur la petitesse de la cambrure de la houle, la théorie potentielle permet de résoudre ces problèmes de diffraction et de radiation, et d'en déduire efforts et mouvements.

En l'absence de structure perturbatrice de l'écoulement, c'est aussi la théorie potentielle qui est utilisée pour décrire la houle et sa cinématique.

A noter que, si l'on superpose un courant U_C à l'écoulement oscillant $A\omega \cos \omega t$, à faible K_C l'écoulement reste attaché au cylindre tant que U_C est petit devant $A\omega$. La théorie potentielle est donc aussi applicable à l'étude de l'interaction d'une structure massive avec la houle et le courant ou, ce qui est équivalent, une vitesse d'avance, tant que le courant ou la vitesse d'avance sont faibles vis-à-vis des vitesses orbitales.

A l'opposé des grands corps, les petits corps sont de dimensions caractéristiques inférieures ou comparables à l'amplitude du mouvement des particules fluides. Ils sont donc de faibles dimensions vis-à-vis de la longueur d'onde, ce qui entraîne que les effets de diffraction sont limités et que, localement, au voisinage d'une tranche de barre de jacket par exemple, l'écoulement incident peut être considéré comme uniforme. Le revers de la médaille est que l'écoulement se sépare et qu'il se forme un sillage que l'on sait mal modéliser. L'état de l'art est alors de relier, de manière empirique, les efforts locaux à l'accélération et à la vitesse de l'écoulement incident local, via la fameuse formule de Morison. Les coefficients d'inertie et de traînée qui interviennent dans cette formulation sont tirés d'essais représentatifs.

Le paradoxe est que la formule de Morison, malgré ses imperfections, permet de prendre en compte un écoulement incident beaucoup plus «fin» que la théorie de diffraction-radiation, limitée à la houle de Stokes de premier ou deuxième ordre. C'est ainsi que le calcul du chargement hydrodynamique sur les jackets se fait habituellement à l'aide de houles de Stokes du troisième ou du cinquième ordre, ou du modèle de fonction de courant.

Il ne faut pas conclure de ce qui précède qu'une structure donnée appartient à l'une ou l'autre des deux catégories. Elle peut être à la fois grand corps et petit corps, ses éléments constitutifs entrant dans les deux catégories (les tours souples munies de flotteurs ou stabilisateurs par exemple), elle peut être petit corps dans certaines conditions de houle et grand corps dans d'autres (les semi-submersibles).

1.2.2 Types de comportements et de sollicitations

Les périodes où la houle présente une énergie significative couvrent une plage allant – grossièrement – de 3 à 20 secondes. A ces périodes (plus particulièrement dans la gamme 8-16 secondes) la houle exerce des sollicitations importantes sur les structures flottantes (ou déformables) et elles y répondent par un mouvement de même période et dont l'amplitude se relie de façon à peu près linéaire à celle de la houle. Des réponses catastrophiques peuvent être atteintes en cas de résonance.

Une technique souvent utilisée pour limiter ce type de réponse est de reporter les périodes propres des mouvements au-delà (ou en deçà) des périodes de houle. C'est ainsi qu'il est préférable d'avoir des ancrages souples, de telle façon que les périodes propres des mouvements

horizontaux des structures flottantes sont habituellement de l'ordre de la minute ou plus. De même les plates-formes semi-submersibles sont dimensionnées de manière que leur période propre en pilonnement tombe vers 20-25 secondes, et celles en roulis et tangage au-delà de 25 secondes. A l'inverse, les plates-formes sur lignes tendues sont raidies verticalement, si bien que leurs périodes propres en pilonnement, roulis et tangage sont inférieures à 3 ou 4 secondes.

Il est naïf de croire qu'une telle technique permet d'éliminer tout risque de résonance. Pratiquement on observe toujours une réponse aux périodes propres, même lorsqu'elles sont éloignées des périodes de houle. Des mécanismes non-linéaires sont à l'origine de l'apparition de ces mouvements, qui peuvent être de forte amplitude si les taux d'amortissement associés sont faibles.

Le mieux connu de ces mécanismes est celui que fait apparaître un calcul «au deuxième ordre d'approximation» des efforts hydrodynamiques.

Si l'on représente la houle incidente, irrégulière, sous la forme :

$$\eta_I(x,y,t) = \sum_i A_i \cos(k_i x \cos \beta + k_i y \sin \beta - \omega_i t + \theta_i)$$

(avec $A_i^2 = 2 S(\omega_i) \Delta\omega$, où $S(\omega)$ est le spectre de houle),

les efforts prédits par la théorie linéaire (ou de premier ordre) sont de la forme :

$$F^{(1)}(t) = \Re \left\{ \sum_i A_i f^{(1)}(\omega_i, \beta) e^{-i\omega_i t + i\theta_i} \right\}$$

ou, dans le domaine fréquentiel :

$$S_{F^{(1)}}(\omega) = S(\omega) \|f^{(1)}(\omega, \beta)\|^2$$

$f^{(1)}(\omega, \beta)$ étant la fonction de transfert complexe.

Élévation de surface libre et efforts de premier ordre apparaissent aux mêmes pulsations.

Au deuxième ordre d'approximation on obtient des efforts supplémentaires prenant place aux différences et sommes deux à deux des pulsations constituant le signal élévation :

– en mode différence :

$$F_-^{(2)}(t) = \Re \left\{ \sum_i \sum_j A_i A_j f_-^{(2)}(\omega_i, \omega_j, \beta) e^{i[-(\omega_i - \omega_j)t + \theta_i - \theta_j]} \right\}$$

– et en mode somme :

$$F_+^{(2)}(t) = \Re \left\{ \sum_i \sum_j A_i A_j f_+^{(2)}(\omega_i, \omega_j, \beta) e^{i[-(\omega_i + \omega_j)t + \theta_i + \theta_j]} \right\}$$

Les quantités complexes $f_-^{(2)}$ and $f_+^{(2)}$ sont connues sous le nom de «fonctions de transfert quadratiques» (QTF). Dans le domaine fréquentiel on obtient, pour les densités spectrales des efforts de deuxième ordre à basse (mode différence) et haute (mode somme) fréquence :

$$S_{F_-^{(2)}}(\Omega) = 8 \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \Omega) \|f_-^{(2)}(\omega, \omega + \Omega, \beta)\|^2 d\omega$$

$$S_{F_+^{(2)}}(\Omega) = 8 \int_0^{\Omega/2} S(\omega) S(\Omega - \omega) \|f_+^{(2)}(\omega, \Omega - \omega, \beta)\|^2 d\omega$$

Une illustration qualitative est fournie par la figure 1.14, représentant $S_{F^{(1)}}$, $S_{F_-^{(2)}}$ et $S_{F_+^{(2)}}$ en fonction de ω . On constate que $S_{F_-^{(2)}}$ couvre tout le domaine des basses fréquences, de la fréquence zéro aux fréquences de houle. Les efforts de deuxième ordre à basse fréquence sont en fait une première approximation de la composante basse fréquence des efforts non-linéaires. De manière analogue $S_{F_+^{(2)}}$ couvre une partie du domaine des hautes fréquences, au-delà des fréquences de houle.

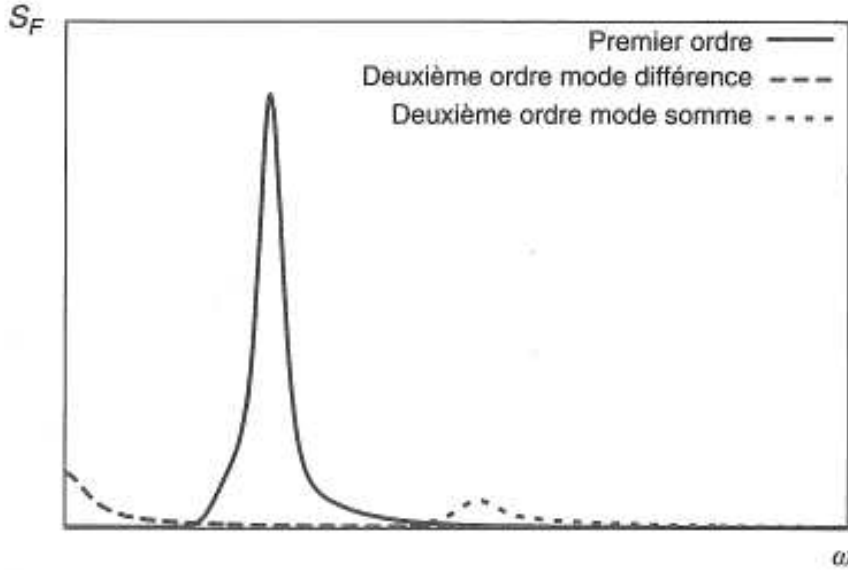


FIG. 1.14 – Spectres des efforts de premier ordre et de deuxième ordre.

Comme le suggère leur appellation, ces efforts de deuxième ordre sont bien plus faibles en magnitude que ceux de la théorie linéaire. Mais ils peuvent entraîner des réponses appréciables, dès lors qu'il se produit un phénomène de résonance.

C'est le cas des mouvements horizontaux des structures ancrées qui ont, typiquement, des périodes propres de l'ordre de la minute. A de telles périodes la théorie linéaire ne fournit aucune excitation ; mais le deuxième ordre d'approximation fait apparaître des efforts, dits efforts de dérive lente, qui fluctuent grossièrement en suivant le signal enveloppe à la houle. Bien qu'entretenus par des efforts plus faibles, ces mouvements de dérive lente sont souvent d'une amplitude bien supérieure à celle de la réponse linéaire. Quelques illustrations sont fournies sur les figures 1.15 à 1.18, où l'on peut noter (figure 1.18) qu'ils peuvent aussi concerner les composantes verticales (pilonnement, roulis, tangage), pour les structures à faible rappel hydrostatique.

Les efforts de deuxième ordre en mode somme sont tenus responsables du comportement résonnant, dit de *springing*, des plates-formes sur lignes tendues. Un exemple est fourni par la figure 1.19, où l'on note des fluctuations de tension à la période propre (5 secondes), dans un état de mer de période de pic double. Il s'agissait là d'un concept un peu optimiste, les périodes propres en pilonnement roulis tangage des TLP sont généralement bien plus faibles, de 2 à 4 secondes. Mais des réponses dynamiques, prenant place à ces périodes, peuvent être observées dans des états de mer de périodes 4, 5 ou 6 fois plus grandes. Un exemple est fourni,

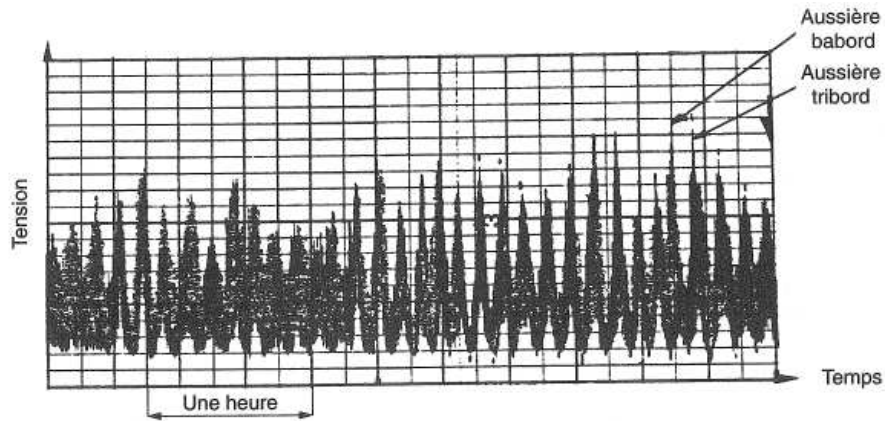


FIG. 1.15 – Enregistrements de tension, dans les deux aussières, sur le pétrolier de stockage Eiko Maru, golfe Arabique. La période dominante est de 400 secondes.

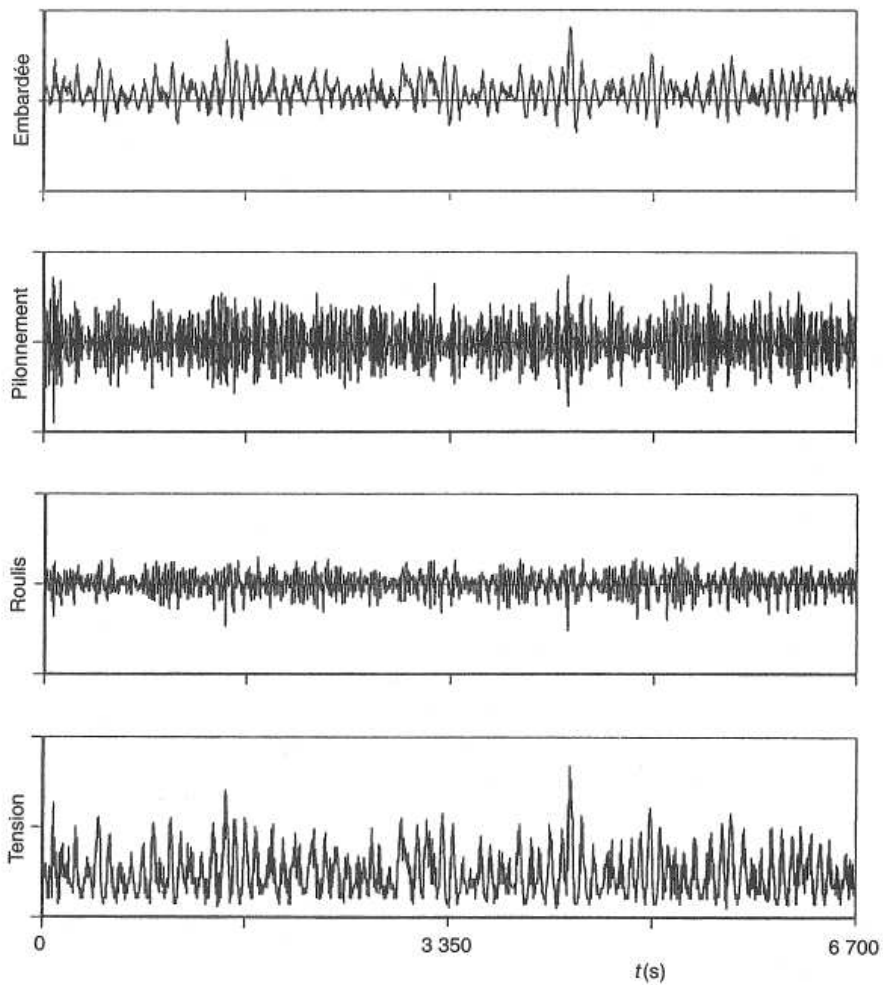


FIG. 1.16 – Essais en bassin sur une plate-forme semi-submersible (NEKTON 8000). Enregistrements des mouvements d'embarquée, pilonnement, roulis et de la tension dans une des lignes d'ancrage.

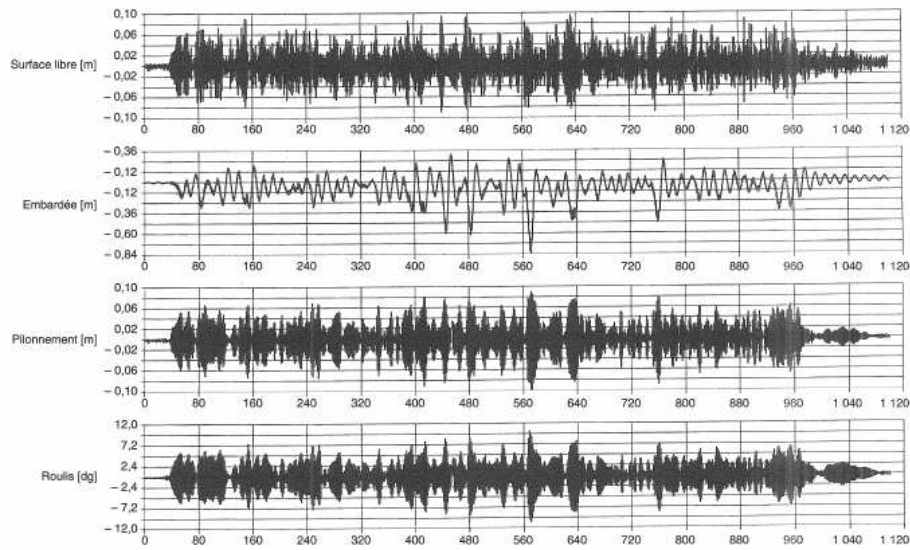


FIG. 1.17 – Essais en bassin sur une barge, en houle de travers. Enregistrements de la houle incidente, de l'embardee, du pilonnement et du roulis.

non pas par une TLP, mais par un cylindre «vibrant», schématisant une structure gravitaire en grande profondeur (figure 1.20). La figure 1.21 montre sa réponse sous l'effet d'un paquet de vagues. On y remarque l'apparition d'une composante importante à la période propre en flexion (0,44 s), alors que la période moyenne des vagues est de 2 secondes.

Pour aborder un tel comportement, dit de *ringing*, il semble bien que la théorie au deuxième ordre soit insuffisante, le ratio entre période de houle et période propre étant trop grand. Une théorie de troisième ordre ferait apparaître des efforts aux pulsations $\omega_i + \omega_j + \omega_k$, de même au quatrième ordre on aurait $\omega_i + \omega_j + \omega_k + \omega_l$, etc. On peut donc avancer que le ringing est dû à des «non-linéarités d'ordre supérieur», même si on ne sait pas encore calculer les efforts associés de manière satisfaisante.

A noter que d'autres phénomènes non-linéaires, comme les instabilités paramétriques, peuvent être à l'origine de comportements résonnants apparaissant à des périodes disjointes de celles de la houle. Un exemple assez connu est celui du roulis hémichrone (ou roulis rythmique, pour les navires), qui prend place lorsque la période de la houle est égale à la moitié de la période propre en roulis.

L'estimation des périodes propres du mouvement des structures flottantes (ou de leurs modes de déformation) est donc un préalable à toute analyse de comportement hydrodynamique. Il est aussi important d'avoir une bonne idée des taux d'amortissement associés.

1.2.3 Méthodologies de calcul du comportement hydrodynamique

Pour des structures fixes qui peuvent être considérées comme indéformables (jackets en faible profondeur), et dont la fonction de transfert des efforts est assez «plate», l'état de l'art est un calcul statique sur houle régulière «de design». Un intérêt est qu'on peut faire appel

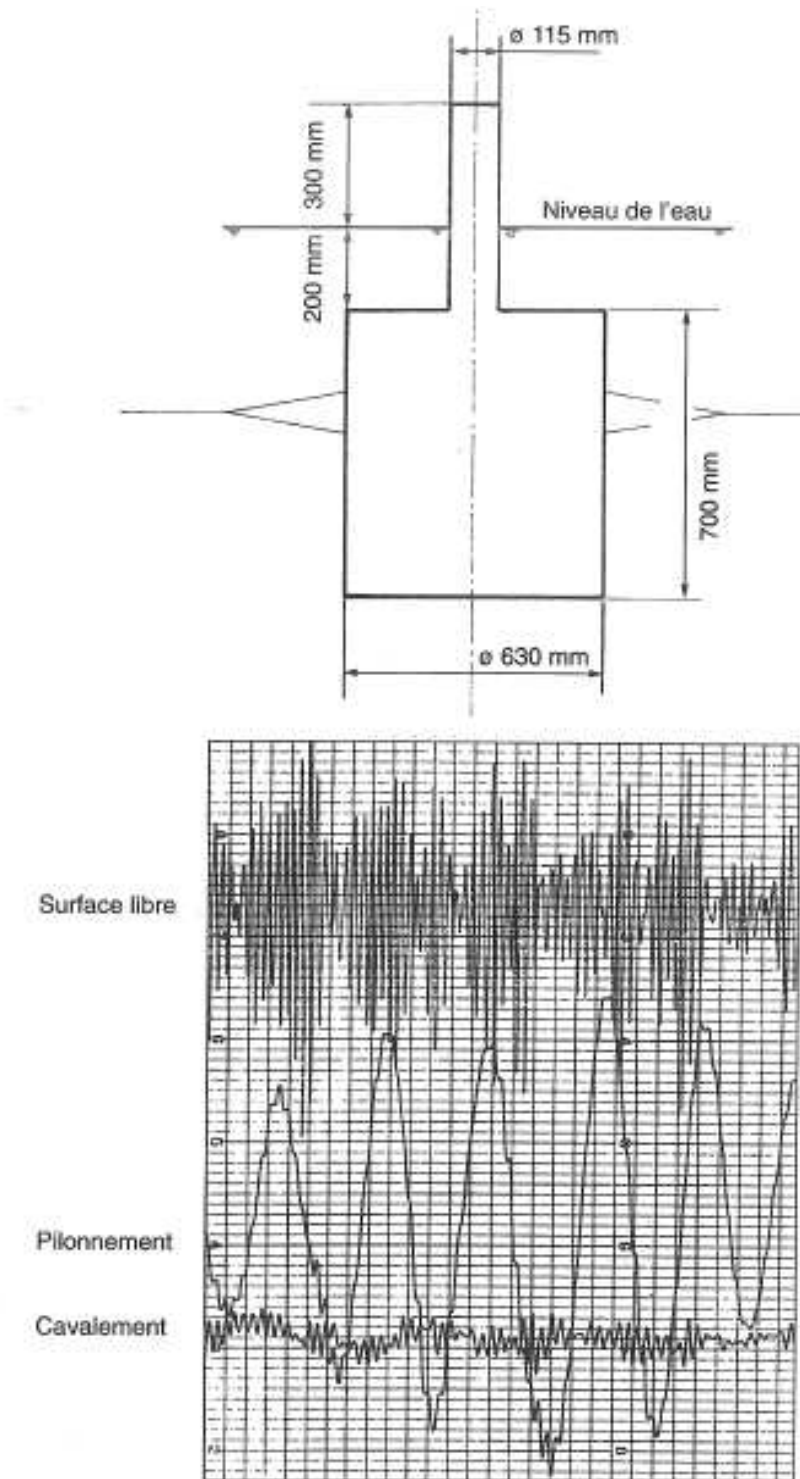


FIG. 1.18 – Essais en bassin sur une plate-forme de type SPAR. Enregistrements de la houle incidente, du cavalement et du pilonnement. Noter l'importance du pilonnement à la période propre.

à une théorie de houle d'ordre élevé (ce qui est d'autant plus nécessaire que la cambrure est forte et que la profondeur est faible), et obtenir ainsi une bonne représentation de la cinématique (et des efforts de traînée) dans les crêtes.

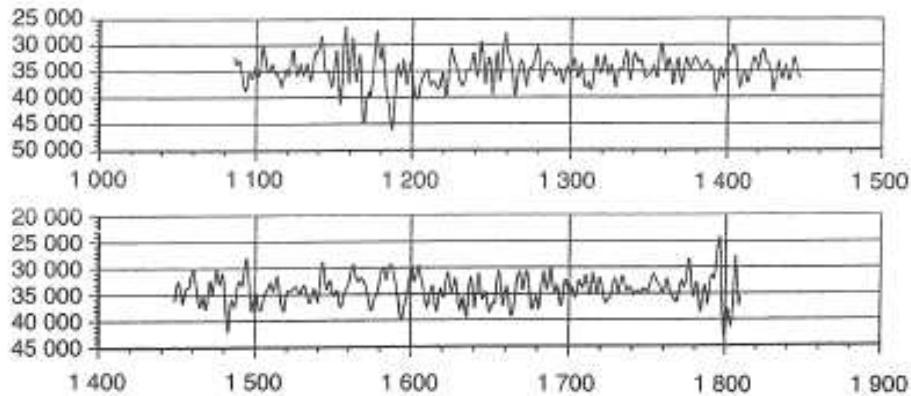


FIG. 1.19 – Essais en bassin sur une plate-forme sur lignes tendues (PLTB 1000). Enregistrement de la tension dans un des tendons. Noter les fluctuations de période 5 secondes, période propre en pilonnement, roulis, tangage du concept.

Pour des systèmes dont la réponse linéaire présente une forte sensibilité à la période de la houle, en particulier en cas de périodes propres tombant dans les périodes de houle, un tel calcul sur houle régulière «équivalente» n'est pas licite. Il importe de rendre compte de la distribution en fréquences du contenu énergétique de la houle. Un calcul spectral est alors indiqué, en théorie linéaire, mais avec des aménagements éventuels pour prendre en compte des amortissements non linéaires, d'origine visqueuse. C'est par exemple le cas du roulis des barges et des FPSO.

Pour les mouvements dont les périodes propres excèdent les périodes de houle, un calcul des efforts de deuxième ordre à basse fréquence, sur houle irrégulière, est en général nécessaire. C'est le cas des mouvements de dérive lente, dans le plan horizontal, des structures ancrées. Mais aussi, éventuellement, celui des mouvements de pilonnement, roulis, tangage des structures flottantes à grand tirant d'eau. On verra au chapitre 6 que pour ces mouvements l'estimation des amortissements est souvent plus délicate que celle des efforts excitateurs.

Reste enfin le délicat problème des résonances à haute fréquence, pour lesquelles le deuxième ordre d'approximation peut être insuffisant.

1.3 Organisation du cours

Le chapitre 2 (le 1 étant cette introduction) est consacré à l'«environnement», mauvais français qui désigne les éléments extérieurs qui vont «charger» les structures : les vagues principalement, mais aussi le vent, le courant, et d'autres facteurs dont on ne parlera pas comme les séismes, la glace (icebergs, pack), etc. L'attention est évidemment principalement donnée aux vagues, telles qu'on peut les mesurer en surface, et telles qu'on va les idéaliser dans les calculs de dimensionnement.

L'étape suivante, qui consiste à associer, à une déformation de la surface libre, une cinématique dans la tranche d'eau, est abordée au chapitre suivant, où les modèles de houle les plus courants sont décrits. (Pour une raison que j'ignore, on ne parle pas de «modèle de vagues» mais de «modèle de houle»; en anglais on dit «*wave theory*», la houle (résiduelle) étant *swell*.)

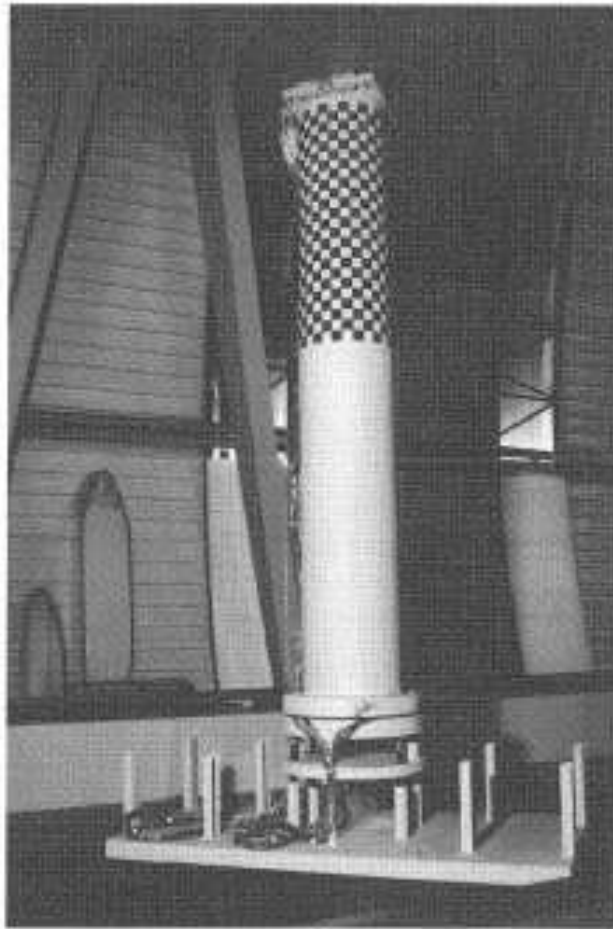


FIG. 1.20 – *Mini GBS*, ou «cylindre vibrant», au-dessus du bassin de traction de l'École centrale de Nantes. La raideur en flexion est assurée par une lame flexible en pied.

Les «petits corps», pour l'essentiel des éléments de section circulaire, sont abordés au chapitre 4. On y introduit la fameuse «formule de Morison» dont la popularité tient essentiellement à sa simplicité. On aborde brièvement le problème des «VIV»: *Vortex Induced Vibrations*, ou vibrations induites par le détachement tourbillonnaire.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux «grands corps»: d'abord (chapitre 5) dans le cadre d'une théorie linéarisée, qui présuppose une faible cambrure des vagues et des petits mouvements de la structure. Puis on s'intéresse (chapitre 6) aux effets «de deuxième ordre», dont la prise en compte est indispensable, par exemple, pour dimensionner les ancrages.

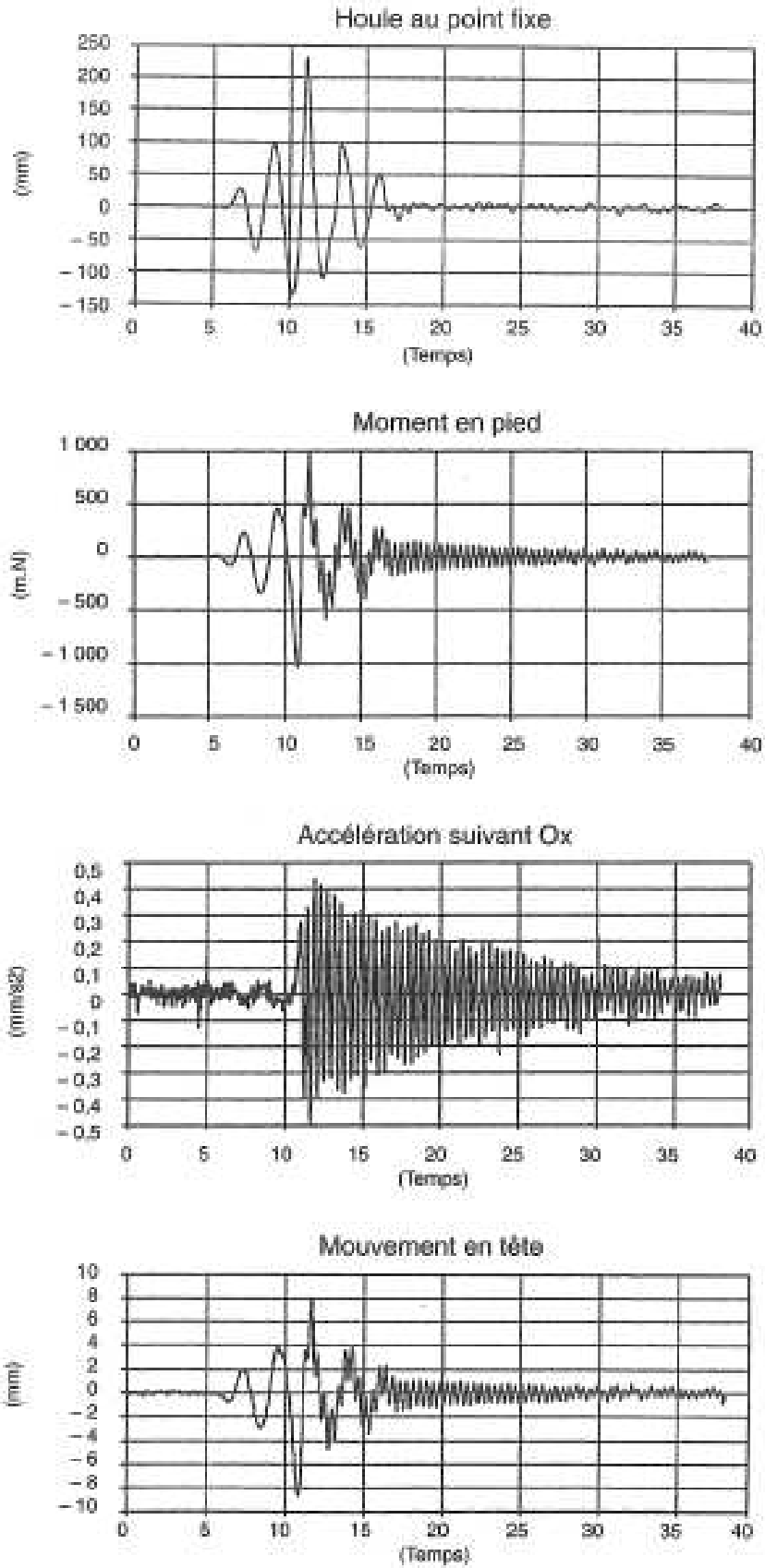


FIG. 1.21 – Réponse du cylindre vibrant à un groupe de vagues. Efforts en pied (gauche). Houle incidente, mesurée en l'absence du cylindre (droite haut). Accélération et mouvement en tête. Noter la composante de la réponse à la période propre en rotation, ici de 0,44 s.

Chapitre 2

ENVIRONNEMENT

Il ne peut y avoir de conception de systèmes offshore sans une connaissance précise des conditions d'«environnement», spécifiques du site où ils sont installés (pour les supports de production ; les supports de forage, amenés à se déplacer de site en site, sont dimensionnés pour une enveloppe de conditions météo-océanographiques). Les paramètres principaux de l'environnement sont la houle, le vent, le courant et, dans certaines zones, les ondes internes, les séismes et la glace (pack ou icebergs).

2.1 La houle

2.1.1 La notion d'état de mer

Au cours de leur vie les structures offshore sont sollicitées par des millions de vagues, dans des conditions de mer variant constamment.

On peut ainsi distinguer deux échelles de temps, celle associée au passage des vagues, de l'ordre de quelques secondes, et celle liée à la variation de l'état de mer, de l'ordre de quelques heures.

On admet en offshore pétrolier que sur une durée fixée forfaitairement à trois heures les conditions de mer restent stationnaires : les propriétés statistiques moyennes des vagues ne changent pas. La vie de la structure se décompose alors en une succession d'états de mer, à raison de $365 \times 8 = 2\,920$ par an. Chaque état de mer consiste en une succession de vagues, de hauteurs et de périodes variables. Ces vagues doivent être décrites d'une manière suffisamment précise pour qu'on puisse par la suite y associer des chargements hydrodynamiques.

Il se pose en particulier le problème de la détermination de l'état de mer, ou de la vague, «de design», à utiliser pour le dimensionnement. La connaissance de l'ensemble des états de mer susceptibles d'être rencontrés est aussi nécessaire pour les calculs en fatigue, particulièrement dans des zones comme la mer du Nord où les tempêtes sont fréquentes.

Dans la mise en exploitation d'un gisement offshore, la première étape est la connaissance des états de mer.

Il existe des méthodes plus ou moins validées de prédiction de la houle en un point à partir des conditions de vent ou barométriques, mais la plus simple et la plus fiable est de la mesurer sur place, par exemple à l'aide d'une bouée accélérométrique.

Classiquement on enregistre le mouvement vertical de la bouée (donc l'élévation de surface libre) pendant 20 minutes toutes les 3 heures à une fréquence de 1 ou 2 hertz.

Il existe deux façons d'exploiter ces enregistrements : l'analyse vague par vague et l'analyse spectrale.

2.1.2 L'analyse vague par vague

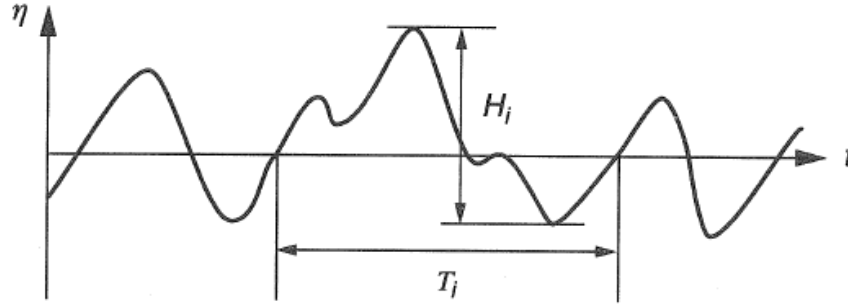


FIG. 2.1 – Enregistrement de l'élévation de surface libre en fonction du temps. Définition des crêtes à creux H_i et des périodes T_i associées.

Soit donc un enregistrement $\eta(t)$ d'élévation de surface libre du type représenté sur la figure 2.1. On suppose $\eta(t)$ à moyenne temporelle nulle. Cet enregistrement présente des maxima négatifs et des minima positifs, aussi est-il quelque peu ambigu de définir ce qu'est une vague.

Par convention on définit une vague comme la portion de signal limitée par deux passages à zéro successifs en montant (*zero up-crossing*) et sa hauteur comme la distance verticale entre son plus bas minimum et son plus haut maximum.

On obtient ainsi, sur l'intervalle de temps échantillonné, N_v vagues de hauteur H_i ($i = 1, N_v$) et de périodes (*up-crossing*) T_i . On peut en tirer des valeurs moyennes \bar{H} et \bar{T} (souvent notée T_Z ou T_{uc}), maximales (H_{\max}, T_{\max}), et d'autres paramètres statistiques.

Il est d'usage de réordonner les vagues par hauteurs (resp. périodes) croissantes, et d'en éliminer une certaine fraction en commençant par les plus basses. On définit ainsi des valeurs «au tiers» ou «au dixième» comme :

$H_{1/3}$: hauteur moyenne du tiers des vagues les plus hautes

$T_{1/3}$: période moyenne du tiers des vagues les plus longues

On peut également définir :

$T_{H_{1/3}}$: période moyenne du tiers des vagues les plus hautes

$H_{T_{1/3}}$: hauteur moyenne du tiers des vagues les plus longues

et de même $H_{1/10}, T_{1/10}, T_{H_{1/10}}, H_{T_{1/10}}$ et enfin $H_{\max}, T_{\max}, T_{H_{\max}}, H_{T_{\max}}$.

Un autre paramètre d'intérêt, et que l'on retrouvera plus loin, est le paramètre de largeur (ou d'étroitesse) défini comme :

$$\epsilon^2 = 1 - \left(\frac{N_v}{N_{\max}} \right)^2 \quad (2.1)$$

N_v étant le nombre de vagues de l'enregistrement et N_{\max} le nombre de maxima. $\epsilon = 0$ signifie qu'il n'existe pas de maxima secondaires. $\epsilon = 1$ qu'il en existe infiniment plus que de vagues.

2.1.3 L'analyse spectrale

Au signal $\eta(t)$ que l'on suppose toujours centré (de moyenne nulle) on associe la fonction d'auto-corrélation $R(\tau)$ définie par :

$$R(\tau) = E \{ \eta(t) \eta(t + \tau) \} \quad (2.2)$$

E désignant la moyenne d'ensemble. Le processus $\eta(t)$ étant stationnaire, ou du moins supposé tel, la fonction d'auto-corrélation ne dépend que de τ . Pratiquement elle est estimée en calculant la valeur moyenne en temps de $\eta(t) \eta(t + \tau)$ (hypothèse d'ergodicité).

A la fonction d'auto-corrélation $R(\tau)$ on fait correspondre la densité spectrale $G(\omega)$ égale à sa transformée de Fourier :

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.3)$$

Réciproquement, par transformée de Fourier inverse :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.4)$$

$R(\tau)$ étant une fonction paire ($R(\tau) = R(-\tau)$) et réelle, $G(\omega)$ est également paire et réelle. Par habitude on utilise, plutôt que $G(\omega)$, la densité spectrale $S(\omega)$ (dite *one-sided*) définie comme :

$$S(\omega) = 2 G(\omega) \quad \text{pour } \omega \geq 0 \quad (2.5)$$

$$S(\omega) = 0 \quad \text{pour } \omega < 0 \quad (2.6)$$

La correspondance entre fonction d'auto-corrélation et densité spectrale est alors :

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (2.7)$$

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (2.8)$$

Le carré moyen (la variance) de l'élévation se relie à la densité spectrale par :

$$E(\eta^2) = R(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (2.9)$$

La densité spectrale $S(\omega)$ (par abus de langage on dit souvent le spectre) représente la répartition en fréquence de l'énergie de la houle. Un moyen simple de réaliser cette propriété consiste à considérer le signal élévation de surface libre comme la superposition d'un grand nombre de sinusoides (c'est le type de représentation que l'on utilisera pour modéliser une houle irrégulière) :

$$\eta(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (2.10)$$

Il vient alors :

$$\eta(t) \eta(t + \tau) = \sum_i \sum_j A_i A_j \cos(\omega_i t + \theta_i) \cos(\omega_j(t + \tau) + \theta_j) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \eta(t) \eta(t + \tau) &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_i A_j \cos[(\omega_i - \omega_j)t - \omega_j \tau + \theta_i - \theta_j] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_i A_j \cos[(\omega_i + \omega_j)t + \omega_j \tau + \theta_i + \theta_j] \end{aligned} \quad (2.12)$$

dont la valeur moyenne en temps est :

$$R(\tau) = E \{ \eta(t) \eta(t + \tau) \} = \frac{1}{2} \sum_i A_i^2 \cos \omega_i \tau \quad (2.13)$$

D'où, par identification avec la relation (2.8) entre le spectre $S(\omega)$ et la fonction d'auto-corrélation $R(\tau)$:

$$A_i^2 = 2S(\omega_i) d\omega_i \quad (2.14)$$

On définit par ailleurs les moments du spectre $S(\omega)$:

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n S(\omega) d\omega \quad (2.15)$$

ce qui permet d'introduire la période moyenne T_m (souvent aussi notée T_1) définie par :

$$T_m = 2\pi \frac{m_0}{m_1} \quad (2.16)$$

On définit également la période de pic T_P , telle que $S(\omega)$ passe par sa valeur maximale en $\omega_P = 2\pi/T_P$.

On verra au paragraphe suivant que la période moyenne up-crossing se relie aux moments d'ordre 0 et 2 par :

$$T_Z = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} = T_2 \quad (2.17)$$

Il est important de bien distinguer ces trois définitions de périodes moyennes dont les valeurs sont différentes.

2.1.4 Statistiques à court terme

Par «court terme» on entend : au cours d'un état de mer considéré comme stationnaire, de durée habituellement prise égale à 3 heures.

Les statistiques à «long terme», que l'on étudie dans la section suivante, cumulent les informations obtenues sur une suite d'états de mer, typiquement l'ensemble des états de mer rencontrés par la structure au cours de sa vie.

On a vu au paragraphe précédent que l'analyse vague par vague permet de construire, de façon empirique, la répartition statistique des hauteurs et des périodes up-crossing (et de

tout autre paramètre directement reliable à la mesure en continu de l'élévation de surface libre).

Il est une autre méthode, purement statistique, qui repose sur la constatation (ou, plutôt, l'hypothèse) que la houle est un processus gaussien. Ce caractère est intimement lié à la possibilité de décomposer le signal élévation de surface libre sous la forme de la superposition d'un grand nombre de sinusoïdes **indépendantes** : d'après le théorème central limite le processus résultant suit la loi normale (ou gaussienne).

Une variable aléatoire X est dite gaussienne si sa densité de probabilité $p(x)$ s'exprime par :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (2.18)$$

où σ est l'écart type : $\sigma^2 = E(X^2) = m_0$

(on fait toujours l'hypothèse de processus centré, c'est à dire de moyenne nulle).

On rappelle la définition de la densité de probabilité :

$$\text{Proba} \{x < X \leq x + dx\} = p(x) dx \quad (2.19)$$

et celle de fonction de répartition $P(x)$:

$$P(x) = \text{Proba} \{X < x\} = \int_{-\infty}^x p(\xi) d\xi \quad (2.20)$$

Pour un processus gaussien :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2\sigma^2} d\xi = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \quad (2.21)$$

où erf est la fonction «erreur», définie par :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (2.22)$$

La figure 2.2 montre la densité de probabilité et la fonction de répartition associées à un processus gaussien.

La connaissance de la densité de probabilité de l'élévation de surface libre ne suffit pas à déduire des informations statistiques sur les passages à zéro ou les maxima. Pour cela il faut introduire les processus dérivés (par rapport au temps t) $\dot{\eta}(t)$ et $\ddot{\eta}(t)$ (également centrés et gaussiens) et considérer la densité de probabilité conjointe $p(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})$.

Etant donnés N processus gaussiens centrés X_1, \dots, X_N , on établit que la densité de probabilité conjointe $p(X_1, \dots, X_N)$ s'écrit :

$$p(X_1, \dots, X_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{C}}} e^{-\frac{1}{2} (X_1, \dots, X_N) \mathbf{C}^{-1} (X_1, \dots, X_N)} \quad (2.23)$$

où \mathbf{C} est la matrice de covariances $\mathbf{C}_{ij} = E(X_i X_j)$.

On obtient, pour $(\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} E(\eta^2) & E(\eta\dot{\eta}) & E(\eta\ddot{\eta}) \\ E(\eta\dot{\eta}) & E(\dot{\eta}^2) & E(\dot{\eta}\ddot{\eta}) \\ E(\eta\ddot{\eta}) & E(\dot{\eta}\ddot{\eta}) & E(\ddot{\eta}^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

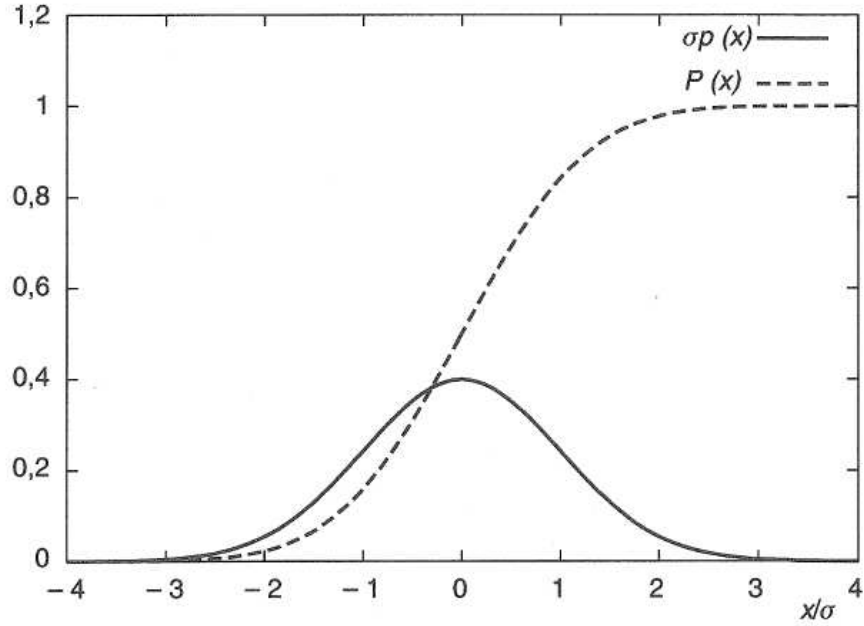


FIG. 2.2 – Densité de probabilité p et fonction de répartition P d'un processus gaussien.

m_0 , m_2 et m_4 étant les moments d'ordre 0, 2 et 4 du spectre.

Pour obtenir les différents termes de la matrice, il suffit de repartir de la représentation (2.10) de l'élévation de surface libre, de la dériver et d'exprimer la valeur moyenne des différents produits.

Considérant d'abord η et $\dot{\eta}$ on obtient que ce sont des processus indépendants, dont la densité de probabilité jointe $p(\eta, \dot{\eta})$ s'écrit :

$$p(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{m_0 m_2}} e^{-\eta^2/2m_0} e^{-\dot{\eta}^2/2m_2} \quad (2.25)$$

Formule de Rice. Fréquence de passage à niveau

On établit que la fréquence moyenne $\nu^+(\eta_R)$ de passage à un niveau η_R du processus $\eta(t)$ avec dérivée positive est donnée par :

$$\nu^+(\eta_R) = \int_0^\infty \dot{\eta} p(\eta_R, \dot{\eta}) d\dot{\eta} \quad (2.26)$$

(On obtient cette relation en exprimant qu'un passage au niveau η_R avec dérivée positive se produit entre les instants t et $t + dt$ si :

1. la pente est positive ;
2. la valeur de η à l'instant t est comprise entre $\eta_R - \dot{\eta} dt$ et η_R).

On obtient alors, pour un niveau η_R donné :

$$\nu^+(\eta_R) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{-\eta_R^2/2m_0} \quad (2.27)$$

En particulier, prenant zéro comme niveau de référence, on obtient la période moyenne dite up-crossing :

$$T_Z(0) = \frac{1}{\nu^+(0)} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} = T_2 \quad (2.28)$$

Pour un niveau différent, on obtient une période moyenne qui se relie simplement à la précédente par :

$$T_Z(\eta_R) = e^{\eta_R^2/2m_0} T_Z(0) \quad (2.29)$$

On peut en tirer la valeur η_{RN} du niveau franchi (en moyenne) une fois toutes les N vagues :

$$\eta_{RN} = \sqrt{2m_0 \ln N} \quad (2.30)$$

Répartition des maxima

On peut de la même manière exprimer la fréquence moyenne d'apparition des maxima, à partir de la densité de probabilité conjointe de η et $\dot{\eta}$ (un maximum de η n'étant autre qu'un passage à zéro de $\dot{\eta}$ avec pente ($\dot{\eta}$) négative) :

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (2.31)$$

d'où l'on déduit la valeur du paramètre d'étroitesse ϵ introduit au paragraphe précédent :

$$\epsilon^2 = 1 - \left(\frac{N_v}{N_{\max}} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\nu^+}{\mu} \right)^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \quad (2.32)$$

Enfin on établit la densité de probabilité des maxima (positifs ou négatifs) qui s'écrit, en variable réduite $y = \eta_{\max}/\sqrt{m_0}$:

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \epsilon e^{-y^2/2\epsilon^2} + \sqrt{1-\epsilon^2} y e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{y\sqrt{1-\epsilon^2}/\epsilon} e^{-u^2/2} du \right\} \quad (2.33)$$

Les densités de probabilité données par cette expression sont représentées sur la figure 2.3, pour ϵ allant de zéro à un.

La distribution des maxima dépend donc du paramètre ϵ . Pour un processus à bande étroite (un seul maximum entre deux passages à zéro up-crossing) la densité de probabilité des maxima suit la **loi de Rayleigh** :

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad p(y) &= y e^{-y^2/2} & (y \geq 0) \\ p(y) &= 0 & (y < 0) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pour un processus à bande très large (une infinité de maxima entre deux passages à zéro) on retrouve la même loi gaussienne que pour le processus lui-même :

$$\epsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \quad (2.35)$$

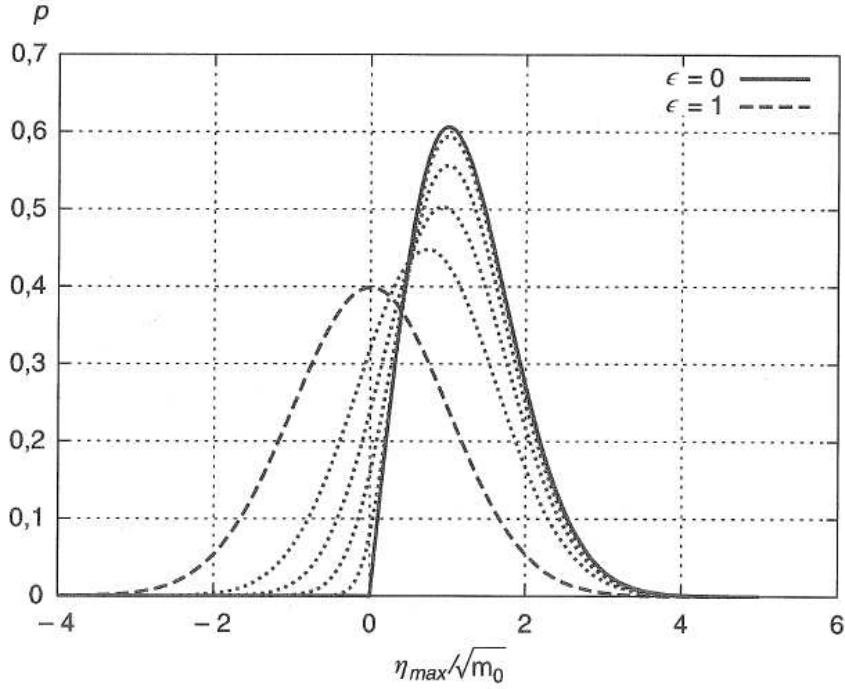


FIG. 2.3 – Densités de probabilité des maxima pour ϵ allant de 0 à 1 par pas de 0,2.

(autant de maxima positifs que de maxima négatifs).

Dans la pratique, si l'on en filtre les composantes de très haute fréquence (ne serait-ce que par l'échantillonnage), le paramètre de largeur ϵ des houles réelles est en général inférieur à 0,5. On admet donc (et on vérifie expérimentalement) que les maxima, et par suite les hauteurs H , suivent la loi de Rayleigh. Celle-ci s'écrit pour les crêtes-à-cieux H :

$$p(H) = \frac{H}{4m_0} e^{-H^2/8m_0} \quad (2.36)$$

la fonction de répartition étant :

$$P(H) = 1 - e^{-H^2/8m_0} \quad (2.37)$$

On en déduit par exemple le crête à creux moyen \bar{H} :

$$\bar{H} = \int_0^\infty H p(H) dH = \sqrt{2\pi} \sqrt{m_0} \quad (2.38)$$

On peut maintenant revenir sur les concepts de $H_{1/3}, H_{1/10}, \dots$ introduits au paragraphe 1.1.2. Pour cela on introduit \tilde{H}_α , hauteur de houle dépassée avec un risque α , et donnée par :

$$P(\tilde{H}_\alpha) = 1 - \alpha$$

soit :

$$\tilde{H}_\alpha = \sqrt{8m_0 \ln \frac{1}{\alpha}} \quad (2.39)$$

La valeur moyenne des hauteurs supérieures à \tilde{H}_α est alors donnée par :

$$H_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_{\tilde{H}_\alpha}^\infty H p(H) dH \quad (2.40)$$

On obtient ainsi :

$$H_{1/10} = 5,092 \sqrt{m_0} \quad (2.41)$$

$$H_{1/3} = 4,004 \sqrt{m_0} \quad (2.42)$$

Aux petites valeurs de α , H_α est donnée de façon asymptotique par :

$$H_\alpha = 2 \left[\sqrt{2 \ln \frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{2 \ln \frac{1}{\alpha}}} \right] \sqrt{m_0} \quad (2.43)$$

$H_{1/3}$ et H_S :

Pourquoi ce concept de $H_{1/3}$ et pourquoi pas plutôt $H_{1/2}$ ou $H_{1/4}$? La raison historique est que $H_{1/3}$ offrait la meilleure concordance avec les estimations visuelles (l'œil ayant naturellement tendance à éliminer les plus basses vagues). On a en outre remarqué que $H_{1/3}$ est relié — statistiquement et pour un spectre étroit — de façon simple à l'écart type :

$$H_{1/3} \simeq 4 \sqrt{m_0} \quad (2.44)$$

Lorsque $H_{1/3}$ est ainsi estimé à partir du spectre de houle on parle plutôt de hauteur **significative** (H_S). Il est d'usage de paramétrer les états de mer en fonction de leur hauteur significative (H_S) et de leur période moyenne up-crossing (T_Z), qui peuvent indifféremment s'obtenir par l'analyse vague par vague ou par l'analyse spectrale.

Hauteur maximale au cours d'un état de mer

Soit un état de mer stationnaire dont la durée, divisée par la période moyenne up-crossing, représente N vagues. Quelle est, en valeur moyenne, la hauteur de la plus haute vague? L'application de la formule ci-dessus pour un niveau de risque $\alpha = 1/N$ n'est pas correcte car la plus haute vague n'est pas forcément supérieure à $\tilde{H}_{1/N}$.

Si l'on suppose que les N vagues constituant l'état de mer sont des variables aléatoires **indépendantes** de même fonction de répartition P , on établit aisément que la fonction de répartition P_N du maximum H_N est simplement donnée par :

$$P_N(H_N) = P^N(H_N)$$

soit, si les hauteurs suivent la loi de Rayleigh :

$$P_N(H_N) = \left(1 - e^{-H_N^2/8m_0}\right)^N$$

qui, aux fortes valeurs de H_N , se comporte comme :

$$P_N(H_N) = \exp \left\{ -N e^{-H_N^2/8m_0} \right\}$$

La dérivation par rapport à H_N fournit la densité de probabilité de la hauteur maximale :

$$p_N(H_N) = \frac{N H_N}{4 m_0} e^{-H_N^2/8m_0} \exp \left\{ -N e^{-H_N^2/8m_0} \right\} \quad (2.45)$$

Le défaut de cette approche est évidemment de supposer indépendantes les vagues constituant l'état de mer. On considère généralement, et on vérifie sur les mesures en mer, que la corrélation n'est en fait appréciable que pour les vagues immédiatement successives, et qu'elle est quasiment nulle dès que les deux vagues considérées sont séparées d'au moins une autre vague. Intuitivement cela revient à dire que N dans l'expression ci-dessus devrait être remplacé par une valeur comprise entre $N - 1$ et N , ce qui, aux fortes valeurs de N , ne change pas grand-chose.

La figure 2.4 montre la densité de probabilité p_N , pour $N = 10, 100, 1000, 10\,000$ et $100\,000$.

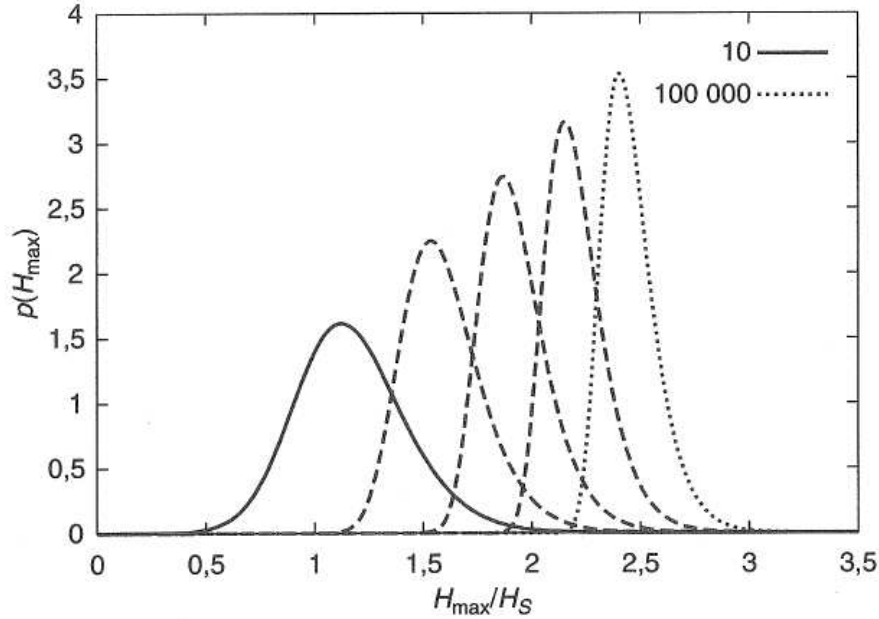


FIG. 2.4 – Densité de probabilité de la plus haute vague d'un état de mer, pour différents nombres de vagues.

La valeur moyenne de la plus haute vague s'obtient en calculant $\int_0^\infty H_N p_N(H_N) dH_N$. C'est le «maximum moyen attendu» (ou l'espérance). Ce n'est pas la valeur la plus probable, qui correspond au maximum de p_N . De manière asymptotique, le maximum moyen attendu vaut :

$$E(H_N) = 2 \left[\sqrt{2 \ln N} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln N}} \right] \sqrt{m_0} \quad (2.46)$$

où γ est la constante d'Euler : $\gamma = 0,5772$.

L'écart type de H_N est donné, de façon asymptotique, par :

$$\sigma(H_N) = \frac{\pi}{\sqrt{3 \ln N}} \sqrt{m_0} \quad (2.47)$$

On peut aussi introduire la hauteur $H_{N\alpha}$ susceptible d'être dépassée avec un risque α . Elle est simplement donnée par :

$$\exp \left\{ -N e^{-H_{N\alpha}^2/8m_0} \right\} = 1 - \alpha \quad (2.48)$$

soit :

$$H_{N\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\ln \left[\frac{N}{\ln 1/(1-\alpha)} \right]} H_{1/3} \quad (2.49)$$

Considérons par exemple un état de mer de durée 3 heures et de période moyenne up-crossing de 10 secondes, soit 1080 vagues. On a alors :

$$\overline{H_{\max}} = E(H_{1080}) = 7,78 \sqrt{m_0} = 1,94 H_{1/3} \quad (2.50)$$

Pour une durée de 6 heures on obtient :

$$\overline{H_{\max}} = 8,13 \sqrt{m_0} = 2,03 H_{1/3} \quad (2.51)$$

soit donc des valeurs peu différentes.

Pour la hauteur ayant 10 % de chance d'être dépassée on obtient respectivement 2,15 et 2,23 fois la hauteur un tiers.

Pseudo-enveloppe et groupage de vagues

On considère à nouveau le signal houle sous la forme :

$$\eta(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \theta_i)$$

et on suppose le spectre «étroit» et centré autour d'une pulsation ω_0 . On peut donc mettre $\eta(t)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_i A_i \cos[(\omega_i - \omega_0 + \omega_0)t + \theta_i] \\ &= \sum_i A_i \cos[(\omega_i - \omega_0)t + \theta_i] \cos \omega_0 t - \sum_i A_i \sin[(\omega_i - \omega_0)t + \theta_i] \sin \omega_0 t \\ &= Y_c(t) \cos \omega_0 t + Y_s(t) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

où $Y_c(t)$ et $Y_s(t)$ sont à variation lente en temps.

On appelle pseudo-enveloppe le signal $E(t)$ défini par :

$$E^2(t) = Y_c^2(t) + Y_s^2(t) \quad (2.52)$$

A noter que l'on peut définir $E(t)$ indépendamment de la pulsation porteuse ω_0 . En effet :

$$E^2(t) = \sum_i \sum_j A_i A_j \cos[(\omega_i - \omega_j)t + \theta_i - \theta_j] = \eta^2(t) + \zeta^2(t)$$

où $\zeta(t) = \sum_i A_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$ n'est autre que la transformée de Hilbert du signal $\eta(t)$:

$$\zeta(t) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(s)}{t-s} ds$$

On verra par la suite que le signal $E^2(t)$ s'apparente fortement aux efforts de dérive à basse fréquence, d'intérêt pour tous les problèmes d'ancrage.

On montre aisément par ailleurs que la densité spectrale du signal $E^2(t)$ s'écrit :

$$S_{E^2}(\Omega) = 8 \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \Omega) d\omega \quad (2.53)$$

La figure 2.5 donne un exemple de signaux élévation et pseudo-enveloppe, en fonction du temps.

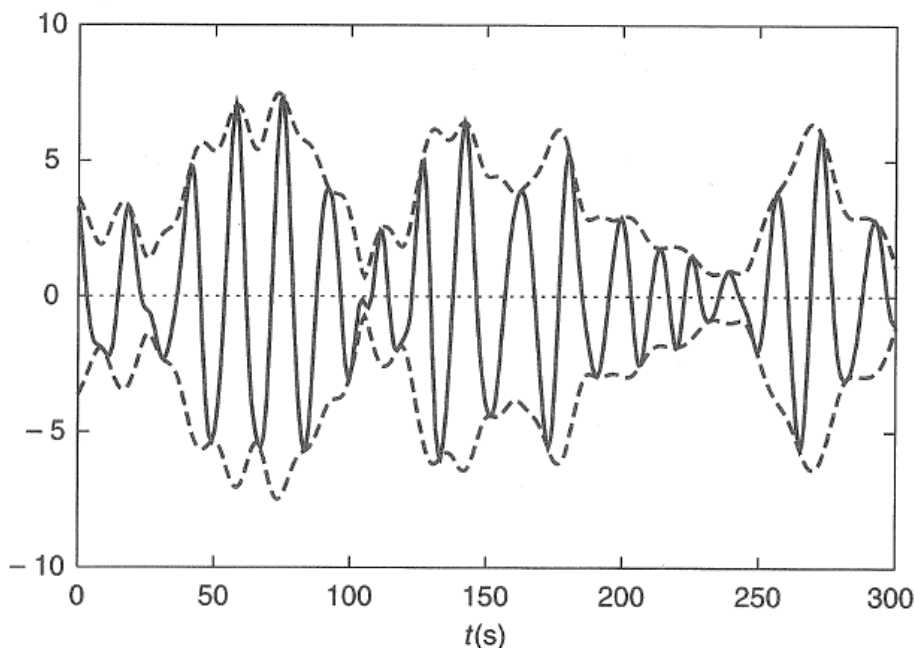


FIG. 2.5 – Processus $\eta(t)$ (trait continu) et pseudo-enveloppe $E(t)$ (tirets).

Effet des non-linéarités

Tous ces résultats théoriques ont été obtenus sous l'hypothèse que le signal élévation est de la forme :

$$\eta(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (2.54)$$

où les phases $\omega_i t + \theta_i$ sont des variables aléatoires **indépendantes**. C'est cette indépendance des phases qui assure que le signal soit gaussien.

On verra au chapitre suivant que, même en l'absence de vent, les équations qui régissent l'évolution des ondes de gravité sont non-linéaires, en particulier les conditions aux limites à la surface libre. Ce n'est que pour des cambrures «infinitésimales» que la linéarisation devient licite, justifiant que les différentes composantes dans (2.54) n'interagissent pas.

Lorsque la cambrure augmente, les non-linéarités de surface libre jouent un rôle de plus en plus appréciable. On verra au chapitre 3 comment en tenir compte par approximations successives, suivant la procédure dite de Stokes où l'on décompose l'élévation η en :

$$\eta = \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \varepsilon^3 \eta^{(3)} + \dots \quad (2.55)$$

le petit paramètre ε s'assimilant à la cambrure.

Les résultats obtenus jusqu'ici l'ont été sous l'hypothèse que le terme $\varepsilon \eta^{(1)}$ est prépondérant et que les suivants sont négligeables.

A l'ordre 2 d'approximation ($\varepsilon^2 \eta^{(2)}$), on fait apparaître des corrections du signal initial $\varepsilon \eta^{(1)}$, apparaissant aux sommes et différences $\omega_i \pm \omega_j$ des pulsations de ses composantes, avec des déphasages $\theta_i \pm \theta_j$. L'hypothèse d'indépendance des phases n'est alors plus vérifiée et le profil de surface libre s'écarte de la loi gaussienne, avec des crêtes plus élevées et des creux moins profonds. Ces effets sont particulièrement sensibles en faible profondeur d'eau. Les densités spectrales tirées de mesures en mer font alors apparaître un deuxième pic, à environ deux fois la fréquence du pic principal, et un contenu souvent notable à très basse fréquence, associé à des variations lentes du niveau moyen, aussi dues à des phénomènes de deuxième ordre.

Au troisième ordre d'approximation les non-linéarités se traduisent par des échanges (lents) d'énergie entre les composantes de houle (les amplitudes A_i et les déphasages θ_i ne peuvent plus être considérés comme constants!), qui s'opposent aux effets de dispersion : les groupes de fortes vagues tendent à se propager en conservant bien davantage leur forme que ne le prédit la théorie linéaire.

Les non-linéarités d'ordre supérieur conduisent rapidement au déferlement, qui joue un rôle important. On considère souvent que le déferlement en houle irrégulière se produit dès que la hauteur d'une vague dépasse la valeur limite $H_d = 0,020 g T^2$ (en grande profondeur). Cela suggère une limitation naturelle de la cambrure maximale au cours d'un état de mer.

C'est ce que semble confirmer la figure 2.6 : on y compare la fonction de répartition empirique, tirée de 28 240 vagues de 200 tempêtes en mer du Nord, à l'expression théorique (2.33). Aux fortes valeurs de $\zeta = H/\sqrt{m_0}$, les valeurs tirées des mesures en mer sont plus faibles que les valeurs théoriques.

Les vagues «anormales»

Des phénomènes comme le déferlement laissent à penser que la loi de Rayleigh est pessimiste et qu'il y a peu de chance, dans un état de mer, d'observer une vague de crête à creux dépassant deux fois la hauteur significative.

De fait les observations montrent l'apparition, rare, de vagues «anormales», baptisées *freak waves* ou *rogue waves* (vagues «scélérates»). La figure 2.7 présente un enregistrement obtenu sur la plate-forme de Draupner, en mer du Nord (la «vague du nouvel an», enregistrée le 1er janvier 1995), avec une vague de 25,6 m alors que la hauteur significative n'est que de 10,8 m, soit un rapport de 2,36. On note la forte asymétrie de cette vague, la crête dépassant les dix-huit mètres. De nombreux incidents survenus en mer du Nord ont été attribués au passage de vagues anormales.

L'interprétation d'enregistrements comme celui montré ici est difficile car une information importante, le caractère directionnel de l'état de mer, est manquante. C'est malheureusement le cas de la plupart des observations, effectuées par des capteurs ponctuels. Une explication souvent proposée à ces vagues anormales est qu'elles résultent de la superposition de deux fortes vagues associées à des trains de vagues de directions de propagation différentes. D'autres auteurs invoquent des phénomènes non-linéaires d'interactions résonnantes entre les

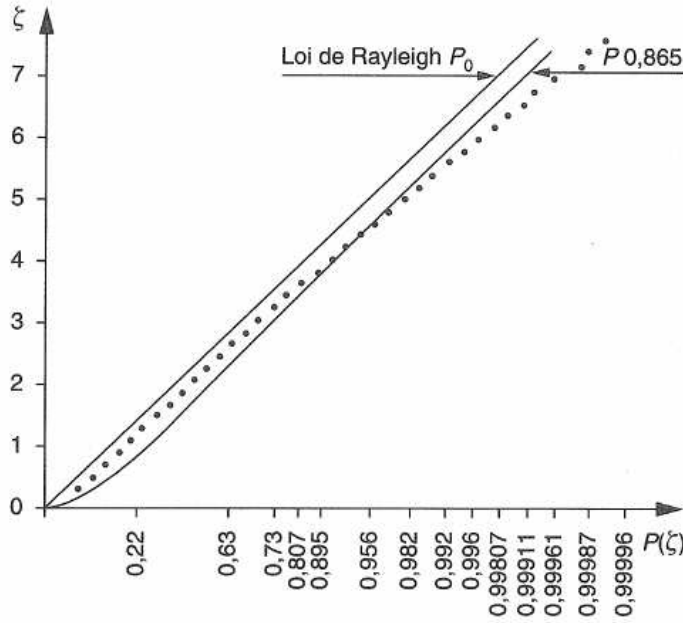


FIG. 2.6 – Observation de 28 240 vagues en mer du Nord, au cours de 200 tempêtes. Fonction de répartition des hauteurs. Comparaison avec l’expression théorique pour $\epsilon = 0$ (Rayleigh) et $\epsilon = 0,865$ (valeur moyenne des états de mer).

composantes de houle.

2.1.5 Quelques spectres usuels

Des considérations théoriques et des ajustements empiriques ont permis de bâtir des formes analytiques des spectres de houle. Certaines sont basées sur la vitesse de vent, la longueur de fetch, etc. D’autres directement sur la hauteur significative et une des périodes caractéristiques ; c’est le plus souvent le cas en offshore pétrolier.

Spectre de Pierson-Moskowitz

Le spectre de Pierson-Moskowitz a été bâti à partir d’observations dans l’Atlantique Nord, lors d’états de mer «pleinement développés». Paramétré en fonction de la hauteur significative et de la période moyenne up-crossing, il s’écrit :

$$S(\omega) = \frac{1}{4\pi} H_S^2 \left(\frac{2\pi}{T_Z} \right)^4 \omega^{-5} e^{-\frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{T_Z} \right)^4 \omega^{-4}} \quad (2.56)$$

Les moments du spectre de Pierson-Moskowitz s’expriment à l’aide de la fonction Γ :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-u} du \quad (2.57)$$

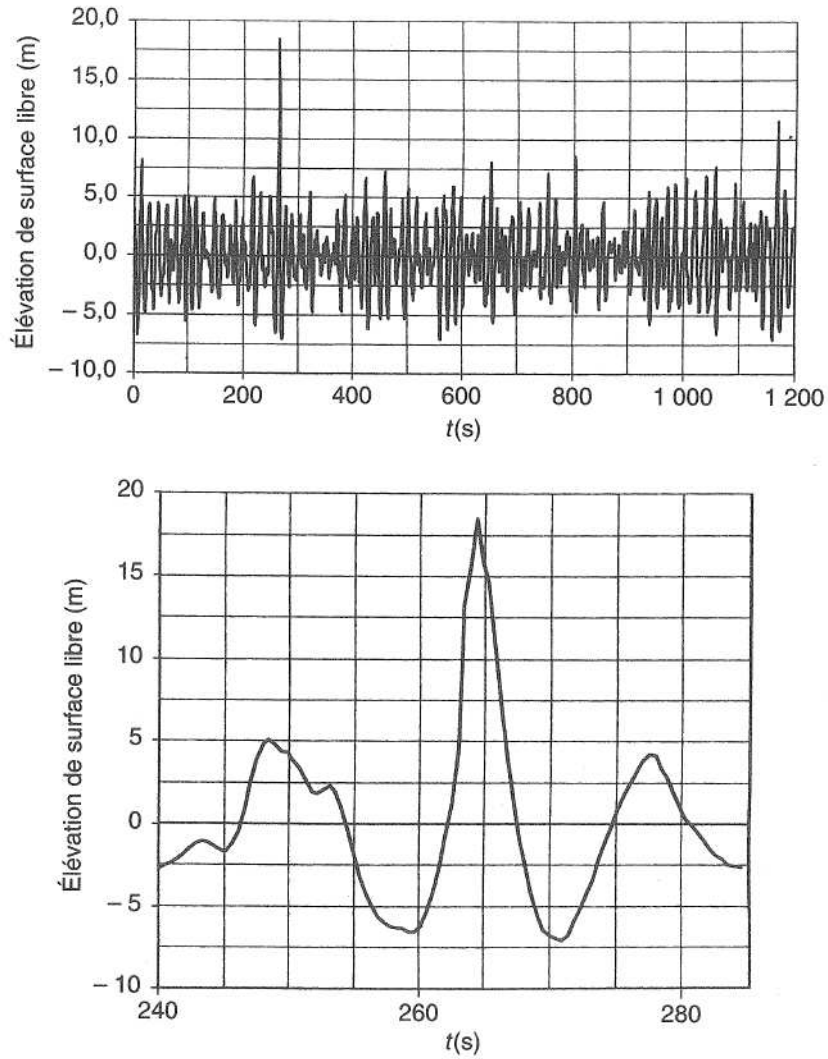


FIG. 2.7 – Enregistrement du passage d'une vague anormale sur le champ de Draupner en mer du Nord.

On vérifie en particulier que la forme proposée du spectre de Pierson-Moskowitz assure que :

$$m_0 = \frac{H_S^2}{16} \quad (2.58)$$

$$T_Z = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \quad (2.59)$$

Les autres périodes moyennes se relient à la période moyenne up-crossing par :

$$T_P = 1,408 T_Z \quad (2.60)$$

$$T_m = 1,086 T_Z \quad (2.61)$$

Spectre de JONSWAP

Le spectre de JONSWAP, qui résulte de campagnes de mesures extensives en Mer du Nord (*JOint North Sea WAve Project*), est une forme plus générale qui englobe le spectre de

Pierson-Moskowitz comme cas particulier. Il s'en distingue par son pic plus élevé. Il s'écrit :

$$S(\omega) = \alpha H_S^2 \omega_P^4 \omega^{-5} e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)^{-4}} \gamma^a \quad (2.62)$$

où :

$$a = e^{-\frac{(\omega - \omega_P)^2}{2\sigma^2\omega_P^2}} \quad (2.63)$$

avec $\sigma = 0,07$ pour $\omega < \omega_P$ et $\sigma = 0,09$ pour $\omega > \omega_P$, ω_P étant la pulsation du pic.

Le pic du spectre de JONSWAP est donc d'autant plus élancé que le paramètre γ est élevé. En pratique on se restreint à des valeurs de γ comprises entre 1 (ce qui redonne le spectre de Pierson-Moskowitz) et 10, 3,3 étant la valeur standard. Le coefficient α est à ajuster au coup par coup, de façon que l'identité :

$$H_S^2 = 16 \int_0^\infty S(\omega) d\omega$$

soit vérifiée.

Un autre problème qui se pose en pratique est que le spectre de JONSWAP est paramétré en fonction de la période (ou pulsation) du pic, et non la période moyenne up-crossing qui est souvent donnée comme spécification.

Pour relier période de pic et période moyenne up-crossing, on peut utiliser la relation suivante (valable pour $0 \leq \gamma \leq 10$), obtenue par régression :

$$\frac{T_Z}{T_P} = 0,6063 + 0,1164 \gamma^{\frac{1}{2}} - 0,01224 \gamma \quad (2.64)$$

Les figures 2.8 et 2.9 présentent des spectres de JONSWAP, pour 4 valeurs du paramètre d'élancement $\gamma = 1$ (Pierson-Moskowitz), 3, 6 et 10. L'aire sous les courbes est constante, donc la même hauteur significative est produite. Sur la figure 2.8 la période de pic reste identique. Sur la figure 2.9, c'est la période moyenne up-crossing qui est conservée.

Distribution des maxima pour les spectres JONSWAP et Pierson-Moskowitz

Aux hautes fréquences les deux spectres présentent la même décroissance en ω^{-5} . Cette puissance cinquième découle de l'hypothèse que, pour des états de mer pleinement développés, la partie haute fréquence du spectre ne dépend pas de la vitesse du vent, mais seulement de la gravité g^1 . Par des considérations dimensionnelles on déduit que la forme du spectre est du type :

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5}$$

α étant la constante de Phillips.

Il en découle que le moment d'ordre 4 du spectre (m_4) est infini, et donc que le paramètre ϵ de largeur de bande est égal à 1 pour des états de mer décrits par les spectres de Pierson-Moskowitz et de JONSWAP. On en déduit que la distribution des maxima ne suit pas une loi de Rayleigh mais une loi normale.

1. Des travaux récents ont remis en cause ce principe et semblent impliquer une décroissance en ω^{-4} plutôt que ω^{-5} .

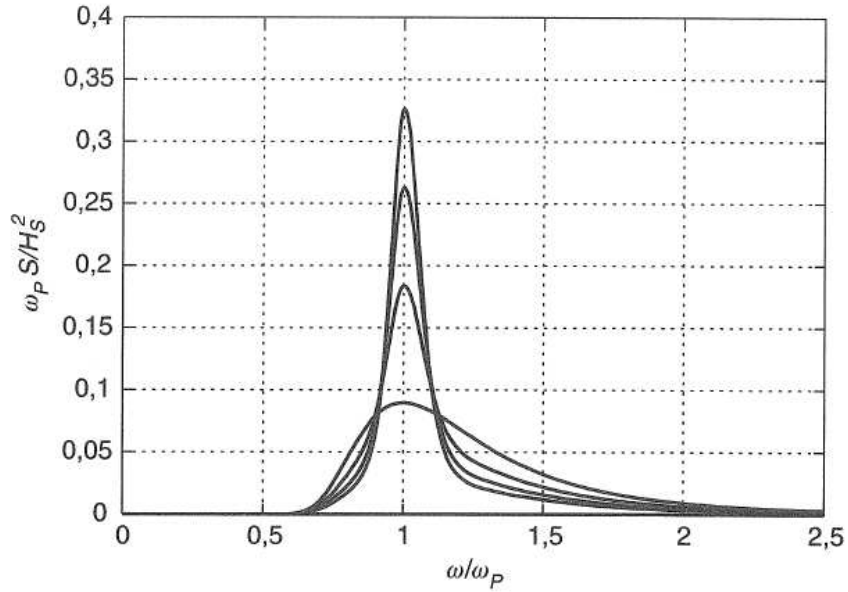


FIG. 2.8 – Spectres de JONSWAP pour $\gamma = 1, 3, 6$ et 10 . Mêmes périodes de pic.

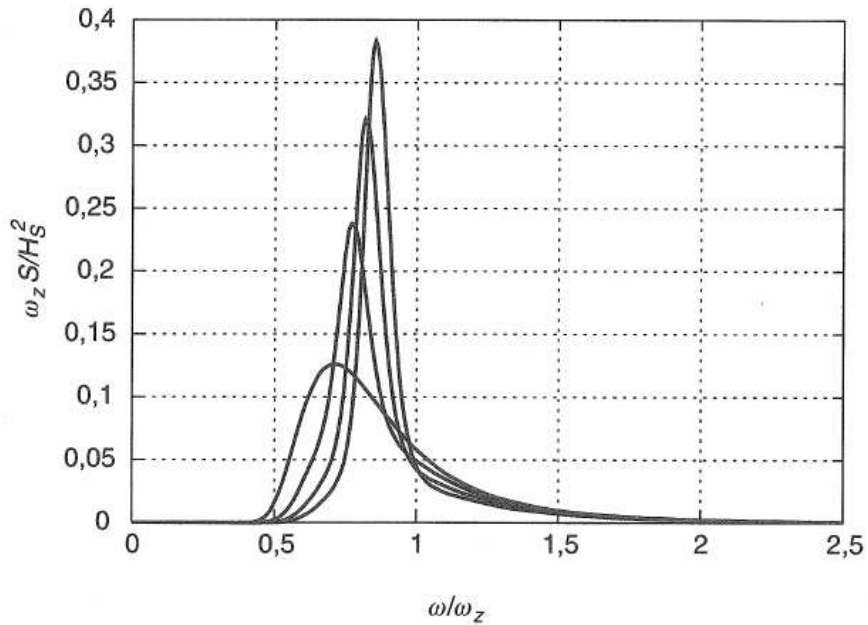


FIG. 2.9 – Spectres de JONSWAP pour $\gamma = 1, 3, 6$ et 10 . Mêmes périodes moyennes up-crossing.

Ce résultat semble quelque peu contradictoire avec les conclusions affichées au paragraphe précédent, à savoir que la loi de Rayleigh est habituellement vérifiée. Le problème, on l'aura compris, provient des très hautes fréquences qui donnent au signal houle un profil bosselé. Dans la pratique ces hautes fréquences se trouvent toujours filtrées, que ce soit par le pas de temps d'échantillonnage ou le traitement numérique. Et de toute façon, qu'elles existent ou n'existent pas dans la réalité, on conçoit bien qu'elles affectent peu les valeurs des crêtes à creux.

Répartition angulaire d'énergie

Sous la forme $S(\omega)$ les spectres de houle sont adaptés à la description du signal élévation de surface libre en un point.

Si l'on désire reconstruire le signal houle en temps et en espace, il convient d'ajouter une information qui est l'étalement angulaire de la houle. Pour cela on utilise des spectres dits «directionnels» $S(\omega, \beta)$:

$$S(\omega, \beta) = S(\omega) G(\omega, \beta) \quad (2.65)$$

où la fonction de répartition angulaire $G(\omega, \beta)$ vérifie :

$$\int_0^{2\pi} G(\omega, \beta) d\beta = 1 \quad (2.66)$$

Dans la pratique on prend habituellement pour $G(\omega, \beta)$ des formes simples, quelque peu arbitraires, du type :

$$G_1(\beta) = C_1(s) \cos^{2s} \frac{\beta - \bar{\beta}}{2} \quad -\pi \leq \beta - \bar{\beta} \leq \pi \quad (2.67)$$

$\bar{\beta}$ étant la direction de propagation moyenne, ou :

$$G_2(\beta) = C_2(s') \cos^{2s'}(\beta - \bar{\beta}) \quad |\beta - \bar{\beta}| < \frac{\pi}{2} \quad (2.68)$$

$$G_2(\beta) = 0 \quad |\beta - \bar{\beta}| > \frac{\pi}{2} \quad (2.69)$$

$C_1(s)$ et $C_2(s')$ étant des constantes déterminées de façon à assurer :

$$\int_0^{2\pi} G_1(\beta) d\beta = \int_0^{2\pi} G_2(\beta) d\beta = 1$$

La figure 2.10 présente les distributions angulaires obtenues avec l'une et l'autre représentation lorsque s et s' prennent les valeurs 2, 4, 8 et 16. On constate qu'on obtient à peu près la même répartition angulaire dès lors que s et s' sont liés par la relation $s = 4s'$.

La figure 2.11 montre une vue tri-dimensionnelle d'un spectre de houle multi-directionnelle.

Spectre en pulsation et spectre en fréquence

On a choisi ici d'exprimer le spectre de houle en pulsation ω , ce qui correspond à l'usage courant (pour le vent, à l'inverse, on exprime le spectre en fréquence). La correspondance entre spectre en pulsation $S(\omega)$ et spectre en fréquence $\tilde{S}(f)$ doit assurer la conservation de l'énergie²:

$$S(\omega) d\omega = \tilde{S}(f) df \quad (2.70)$$

D'où :

$$\tilde{S}(f) = 2\pi S(2\pi f) \quad (2.71)$$

2. C'est là qu'il faut se rappeler que la dénomination spectre est impropre, et qu'il s'agit de **densités** spectrales d'énergie.

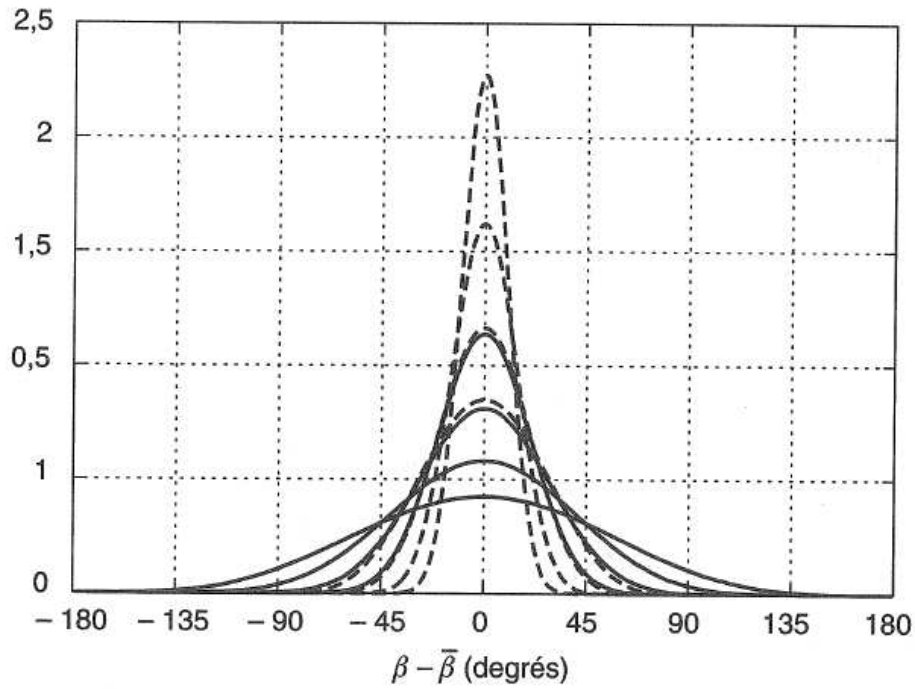


FIG. 2.10 – Distributions angulaires $G_1(\beta)$ (traits continus) et $G_2(\beta)$ (tirets) pour s et s' égaux à 2, 4, 8 et 16.

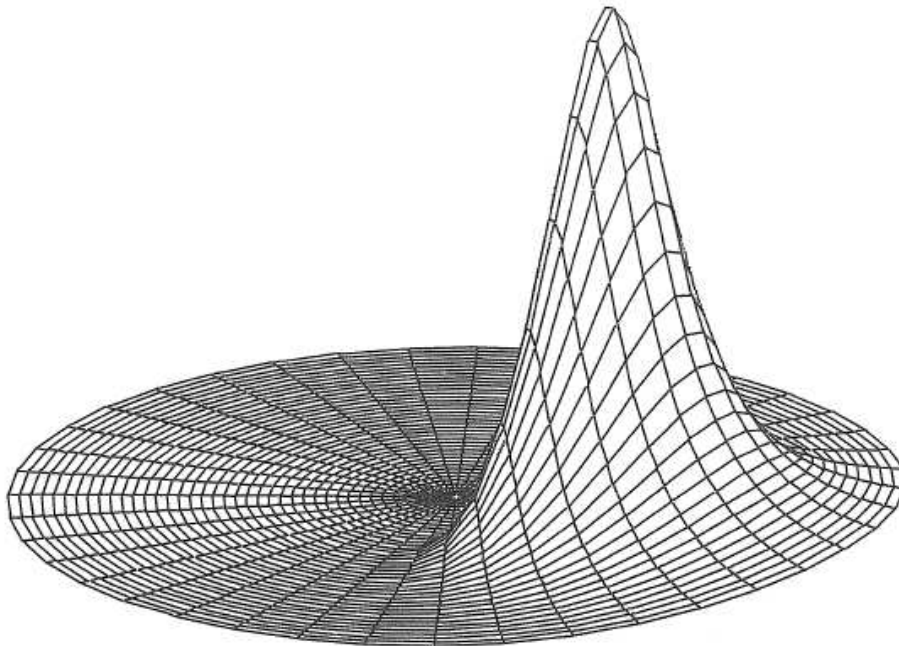


FIG. 2.11 – Exemple de spectre de houle multi-directionnelle.

2.1.6 Statistiques à long terme

La mesure et l'analyse de la houle en un point pendant une longue durée (plusieurs mois à plusieurs années) permettent de bâtir les diagrammes « hauteurs-périodes » (en anglais *scatter diagram*). Le plan $H_S \times T_Z$ (ou $H_S \times T_P$) est quadrillé en $N_H \times N_T$ cases, et dans chaque

case on porte le nombre d'observations correspondantes effectuées au cours de la période de mesure. Chaque observation correspond à un état de mer unitaire, soit en général à une durée de 3 heures, et on a un total de $8 \times N_J$ observations, N_J étant le nombres de jours d'enregistrement. [En l'absence de mesures de houle (ou pour les enrichir), on peut également reconstruire (compléter) ces diagrammes hauteurs-périodes à partir des données météo accumulées sur plusieurs années à l'aide d'un modèle de *hindcasting*].

$H_S \backslash T_P$	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21 (s)	TOTAL
0-1	27	1112	3092	2648	1084	357	102	27	7	2	8 278
1-2	3	939	7350	11515	7753	3309	1099	318	85	30	32 401
2-3	0	83	2387	8081	8591	4684	1726	505	128	38	26 223
3-4	0	3	373	3050	5498	3977	1638	476	111	28	15 154
4-5	0	0	36	855	2902	2987	1429	416	88	18	8 731
5-6	0	0	2	165	1189	1899	1117	337	66	11	4 786
6-7	0	0	0	20	358	981	763	250	45	6	2 423
7-8	0	0	0	1	78	407	453	171	30	3	1 145
8-9	0	0	0	0	12	133	234	109	20	1	509
9-10	0	0	0	0	1	34	102	63	12	1	213
10-11	0	0	0	0	0	7	37	33	8	1	86
11-12	0	0	0	0	0	1	12	15	4	0	32
12-13	0	0	0	0	0	0	3	6	3	0	12
13-14	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	4
14-15 (m)	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
TOTAL	30	2 137	13 240	26 155	27 466	18 776	8 718	2 729	609	159	99 999

Tableau 2.1. Exemple de diagramme hauteurs-périodes (mer du Nord).

Le problème qui se pose est, à partir de ces observations limitées en temps, de déduire des états de mer de design, définis par exemple comme la hauteur significative que l'on a une probabilité de 10 % de dépasser en 20 ans.

Le principe général des méthodes employées consiste à bâtir, à partir des diagrammes hauteur-période, une fonction de répartition empirique $P(H_S)$ (ou $P(H_S, T_Z)$) des états de mer sur le site considéré, et à lui faire coïncider, aux grandes valeurs de H_S , une loi asymptotique donnée. On déduit les valeurs de design par extrapolation sur la courbe ainsi définie, au delà des valeurs mesurées.

Il est évident qu'il n'y a aucun fondement physique à cette manière de procéder autre que les lois de la statistique et que le plus sûr moyen d'aboutir à un résultat fiable est de multiplier les observations.

Parmi les différentes lois statistiques représentatives des queues de distribution, la plus usitée en offshore est celle de Weibull, dont la fonction de répartition s'exprime par :

$$P(H) = 1 - e^{-H^\alpha/\rho} \quad (2.72)$$

et qui requiert donc le calage de deux paramètres α et ρ .

Pour cela on représente sur du papier dit de Weibull :

$$\ln [-\ln(1 - P(H))] \quad \text{en fonction de} \quad \ln H$$

et on fait passer une ligne droite à travers les points ainsi obtenus. De sa pente et de son point d'intersection avec l'axe vertical on déduit les valeurs de α et ρ .

Période de retour

Par définition la période de retour d'une valeur H est telle que cette valeur H y soit dépassée une fois en moyenne. Par exemple sur la base de $8 \times 365 = 2920$ états de mer par an, une période de retour de 100 ans correspond à une valeur de la fonction de répartition égale à :

$$1 - \frac{1}{100 \times 2920} = 0,99999658$$

On parle alors d'état de mer centenal (ou centenaire!).

De même une période de retour de 10 ans signifie une fonction de répartition égale à 0,9999658, une période de retour d'un an donne 0,999658.

Cela ne signifie évidemment pas que l'on soit sûr de rencontrer un état de mer égal ou supérieur à l'état de mer centenal sur une durée d'un siècle (la probabilité de ne pas le dépasser étant de $1/e$, soit 37 %). Par contre la valeur moyenne et la valeur la plus probable de l'état de mer le plus sévère rencontré sur une durée d'un siècle sont supérieures à l'état de mer centenal.

La figure 2.12 présente, sur papier Weibull, la fonction de répartition empirique de la hauteur significative, à partir des observations portées dans le tableau 2.1. On constate que les points s'alignent effectivement sur une droite pour des valeurs de H_S supérieures à 3 ou 4 mètres. Si on prolonge la partie rectiligne on atteint une hauteur significative de l'ordre de 16 mètres pour une période de retour de 100 ans.

Période moyenne associée

Une fois déterminée la hauteur significative centennale il se pose évidemment le problème de lui associer une période moyenne up-crossing. Pour cela on peut, à partir des diagrammes hauteur-période, bâtir une fonction de répartition conditionnelle $P(T_Z/H_S)$ et l'extrapoler. Plus prosaïquement on peut établir, à partir de considérations sur la cambrure moyenne par exemple, un intervalle $[T_{Z \min} \ T_{Z \max}]$ dans lequel est susceptible de varier la période moyenne associée au H_S centenal, et retenir, dans cet intervalle, la valeur conduisant au résultat le plus pénalisant pour le calcul effectué.

Crêtes à creux de design

Certains calculs — le dimensionnement des jackets par exemple — se font en modélisant la houle comme une houle régulière de crête à creux et de période donnés. Les valeurs de

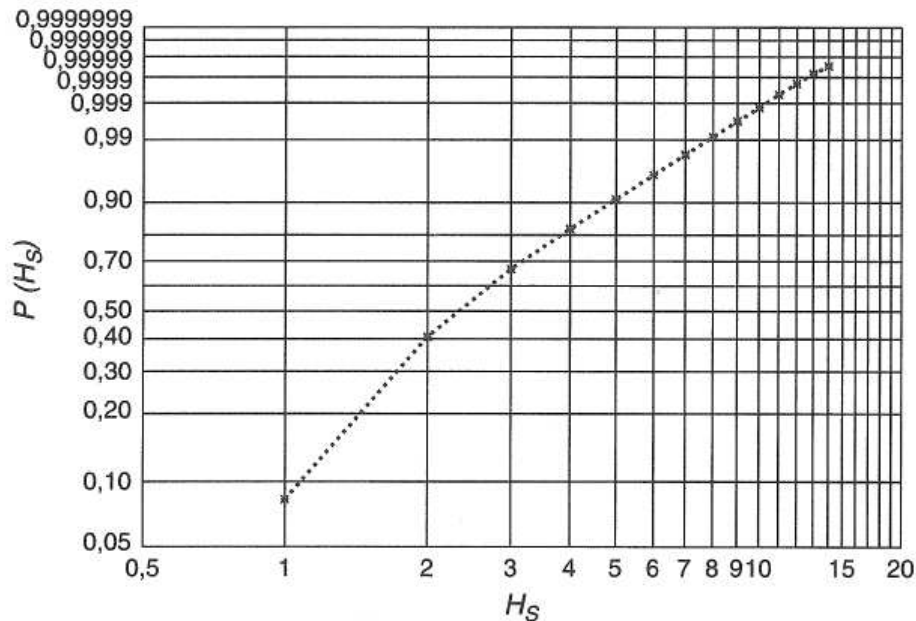


FIG. 2.12 – Fonction de répartition empirique de la hauteur significative, basée sur les observations du tableau 2.1.

design à prendre en compte sont alors le crête à creux centenal (par exemple) et la période associée.

La manière la plus correcte de procéder est de répéter la même analyse que pour la hauteur significative, à partir de diagrammes «crête à creux maximum \times période associée». Cela suppose évidemment que de tels diagrammes soient disponibles.

Si les données disponibles ne concernent que les hauteurs significatives, force est de supposer que, dans un état de mer donné, les crêtes à creux sont distribués suivant la loi de Rayleigh. On cumule alors les distributions à long terme des hauteurs significatives et les distributions à court terme des hauteurs individuelles pour en tirer la distribution à long terme des crêtes à creux maximums. Ce qui est critiquable dans cette approche est qu'elle repose sur une hypothèse de linéarité alors que manifestement des états de mer extrêmes sont non linéaires.

2.2 Le vent

Les structures offshore ont des fardages souvent considérables et sont particulièrement sensibles au vent, qui crée des efforts moyens importants (couples de renversement pour les structures fixes, efforts moyens d'ancrage pour les structures flottantes), mais aussi des sollicitations dynamiques dans une gamme de fréquences très étendue.

La structure du vent au dessus de la mer s'apparente fortement à celle d'un écoulement turbulent sur une plaque rugueuse, l'épaisseur de la couche limite étant de plusieurs dizaines (ou centaines) de mètres. Quelques facteurs toutefois viennent compliquer la situation :

- la rugosité (les vagues) est en mouvement ;
- la masse volumique de l'air varie avec l'altitude, la température et l'humidité ;
- les forces de Coriolis entraînent une variation de la direction du vent avec l'altitude

(spirale d'Ekman). Cet effet est en général négligeable dans les premières dizaines de mètres ;
 – l'atmosphère peut être en état stable ou instable suivant le gradient thermique vertical. Contribue également à cette stabilité ou instabilité la différence de température entre l'air et l'eau.

De même que pour la houle l'analyse repose sur la notion d'état de mer stationnaire de 3 heures, pour le vent on raisonne sur des enregistrements d'une certaine durée (3 heures également par exemple) pendant laquelle les conditions de vent peuvent être considérées comme stationnaires.

Il est alors d'usage de définir plusieurs vitesses moyennes, notées $V_m(z,t)$, où z est l'altitude et où t est la durée sur laquelle la valeur moyenne est déterminée. Par exemple $V_m(z,600)$ désigne la vitesse moyennée sur dix minutes, $V_m(z,60)$ la vitesse moyennée sur une minute, etc. Il s'agit là de la valeur moyenne maximale obtenue sur l'enregistrement initial de 3 heures, lorsqu'on y fait glisser une fenêtre de dix ou une minutes. De la même façon $V_m(z,15)$ et $V_m(z,3)$ désignent les vitesses maximales des rafales de vent moyennées sur 15 ou 3 secondes.

2.2.1 Variation de la vitesse du vent avec l'altitude

Pour une atmosphère thermiquement stable on admet que la vitesse moyenne suit la loi logarithmique des couches limites turbulentes :

$$V_m(z) = \frac{v_\star}{K} \ln \frac{z}{z_0} \quad (2.73)$$

où v_\star est la **vitesse de frottement**, K la **constante de von Karman** (environ 0,4) et z_0 une **hauteur de rugosité** fonction de l'état de mer (donc de la vitesse du vent) et dont les valeurs citées dans la littérature varient de quelques dixièmes de millimètres à plusieurs centimètres !

Forristall (1988) propose la relation suivante entre z_0 et la vitesse de frottement :

$$z_0 = 0,0144 \frac{v_\star^2}{g} \quad (2.74)$$

cependant que la vitesse de frottement est reliée à la vitesse moyenne de référence (habituellement $V_m(10,600)$) par :

$$v_\star^2 = C_d V_m^2 \quad (2.75)$$

C_d étant le coefficient de frottement.

Dans la pratique on utilise des lois du type logarithmique ou du type puissance qui permettent de relier $V_m(z,t)$ à $V_m(10,t)$, l'altitude 10 mètres étant prise comme niveau de référence.

Loi logarithmique

Elle s'écrit :

$$\frac{V_m(z,t)}{V_m(10,t)} = \frac{\ln z/z_0}{\ln 10/z_0} \quad (2.76)$$

Loi de type puissance

Elle s'écrit :

$$\frac{V_m(z,t)}{V_m(10,t)} = \left(\frac{z}{10}\right)^\alpha \quad (2.77)$$

où typiquement α est compris entre 0,1 et 0,2.

La plupart des règlements préconisent des lois de ce type. Le coefficient α est éventuellement ajusté en fonction des conditions de stabilité de l'atmosphère (une atmosphère instable conduit à un profil plus plat) et de la durée de référence de la vitesse moyenne (une rafale ayant également un profil plus plat).

2.2.2 Variation de la vitesse de vent avec la durée de référence

Là également les règlements proposent différentes formulations. Par exemple :

$$\frac{V_m(z,t)}{V_m(z,600)} = 1,57 - 0,09 \ln t \quad (2.78)$$

ou :

$$\frac{V_m(z,t)}{V_m(z,600)} = 0,6 + \frac{1,36}{t^{1/5}} \quad (2.79)$$

2.2.3 Spectres des fluctuations de vitesses

Considérant un enregistrement de vitesse de vent en un point x,y,z pendant une durée T , on peut séparer la composante longitudinale de la vitesse en une valeur moyenne et une quantité fluctuante :

$$V(t) = V_m(T) + V'(t)$$

les composantes transversale et verticale fluctuant également, autour d'une valeur moyenne nulle.

On peut en déduire la fonction d'auto-corrélation des fluctuations de vitesse longitudinale :

$$R(\tau) = E\{V'(t) V'(t + \tau)\}$$

On appelle intensité de turbulence le rapport de l'écart type longitudinal à la vitesse moyenne :

$$I_V = \frac{\sigma_V}{V_m}$$

où :

$$\sigma_V^2 = R(0) = E\{V'^2(t)\}$$

Typiquement l'intensité de turbulence est de l'ordre de 5 à 15 %.

Par transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation on obtient la densité spectrale des fluctuations de vitesses. Il est d'usage de l'exprimer en fréquence et de la mettre sous la forme adimensionnelle :

$$\frac{f S(f)}{V_m^2} \quad \left(\text{ou} \frac{f S(f)}{\sigma_L V^2} \right) = F(\tilde{f})$$

où :

$$\tilde{f} = \frac{f L_V}{V_m}$$

L_V étant une longueur de référence.

Dans le domaine des hautes fréquences on peut supposer la turbulence homogène et isotrope (hypothèse de Kolmogorov). Par des considérations dimensionnelles on établit que la forme asymptotique de $S(f)$ est en $f^{-5/3}$.

Tous les spectres de vent proposés dans la littérature s'accordent sur ce comportement haute fréquence en $-5/3$. Ils diffèrent par contre fortement dans le domaine des basses fréquences, particulièrement pour des périodes de l'ordre de la minute où se situent les périodes propres des mouvements horizontaux des structures ancrées. (La raison principale de ce désaccord étant qu'ils ont été étalonnés sur des fréquences d'intérêt pour les édifices terrestres, supérieures à 0,2 hertz). La figure 2.13 présente quelques spectres de la littérature, comparés à des mesures, mis sous la forme sans dimension $S(f_*) = f S(f)/v_*^2$ et tracés en fonction de $f_* = f z/V_m(z)$ où z est l'altitude de référence.

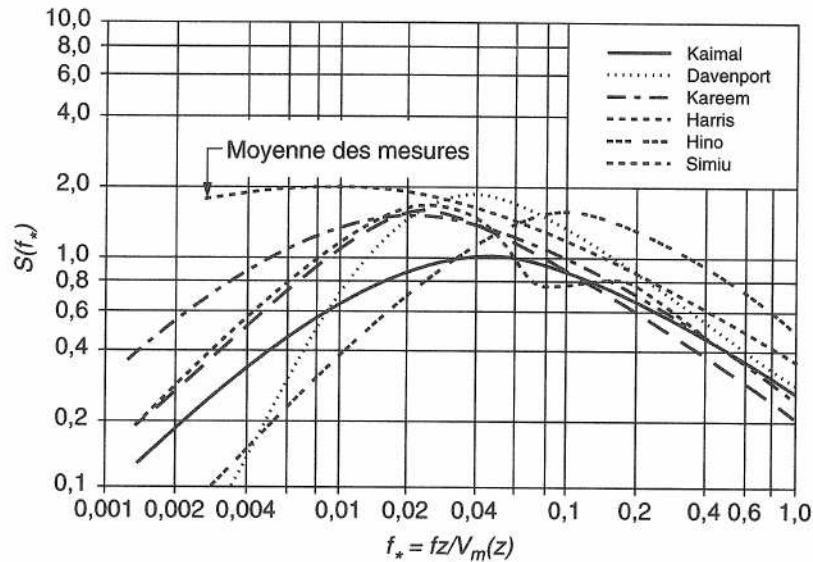


FIG. 2.13 – Spectres de vent.

Parmi les formes de spectres proposées on peut citer :

Le spectre de Davenport

$$\frac{f S(f)}{V_m^2} = 4 C_d \frac{\tilde{f}^2}{(1 + \tilde{f}^2)^{4/3}} \quad (2.80)$$

Le spectre de Harris

$$\frac{f S(f)}{V_m^2} = 4 C_d \frac{\tilde{f}}{(2 + \tilde{f}^2)^{5/6}} \quad (2.81)$$

Il existe de nombreuses autres formulations (Hino, Kaimal, Kareem, Simiu & Leigh, etc.). Une même appellation contrôlée peut par ailleurs être formulée différemment suivant la valeur choisie pour la longueur de référence, ou suivant que $f S(f)$ est divisé par la vitesse moyenne (aussi plus ou moins arbitraire) ou l'écart type des fluctuations.

2.2.4 Définition des valeurs de design

Elles s'obtiennent de la même façon que pour la houle. A partir d'observations en nombre suffisant, on construit des fonctions de répartition empiriques sur lesquelles on vient ajuster des lois de Weibull ou autres lois asymptotiques. Par extrapolation on déduit des valeurs décennales, centenales, etc.

2.3 Le courant

Le courant en un site offshore donné résulte de la superposition des courants océaniques, des courants de marée et d'un effet d'entraînement des masses d'eau superficielles sous l'action du vent. La périodicité des premiers est de l'ordre du mois, les marées suivant les mers du globe ont des cycles diurnes ou semi-diurnes, aussi considère-t-on que la vitesse du courant reste constante en vitesse et en direction au cours d'un état de mer donné.

Par contre le courant varie en intensité et en direction dans la tranche d'eau, et le concepteur se voit en général spécifié un «profil» des vitesses décennal, un profil centenal, etc.

A noter que l'effet de transport de masse, associé à la houle, est quelquefois inclus dans la définition du courant (voir le chapitre suivant).

2.4 Les ondes internes

La masse volumique de l'eau de mer n'est pas rigoureusement constante. Elle varie en fonction de sa salinité et de sa température. En particulier, sur une verticale, on peut avoir une variation sensible de densité entre les eaux de surface, plus chaudes, et les eaux profondes, plus froides. La limite entre les deux couches peut être assez localisée, au point de pouvoir être considérée comme une interface entre deux fluides de densités légèrement différentes. Ce phénomène est particulièrement marqué dans les zones tropicales et équatoriales, où les différences de température, entre les deux couches, peuvent atteindre une vingtaine de degrés. Leur interface, la thermocline, est typiquement à des profondeurs de l'ordre de cinquante mètres.

La stratification peut aussi être liée à une différence de salinité, par exemple à proximité d'un estuaire.

De même que les vagues apparaissent à l'interface eau-air, des ondes peuvent prendre naissance à l'interface entre les deux couches : les ondes internes. Leur vitesse de propagation (vitesse de phase) est approximativement donnée par :

$$C_P = \sqrt{g h \frac{\Delta\rho}{\rho}} \quad (2.82)$$

où h est la hauteur de la couche supérieure et $\Delta\rho/\rho$ la variation relative de masse volumique. Typiquement $\Delta\rho/\rho$ est de l'ordre de 10^{-3} ou 10^{-4} . Ce sont donc des ondes qui se propagent lentement, mais qui peuvent conférer à la masse d'eau, particulièrement à la couche superficielle, des vitesses horizontales appréciables. Sur un site donné le passage d'une onde interne équivaut donc à un courant de vitesse variable en temps, et présentant de plus un profil vertical particulier, avec une inversion de sens à l'interface (figure 2.14).

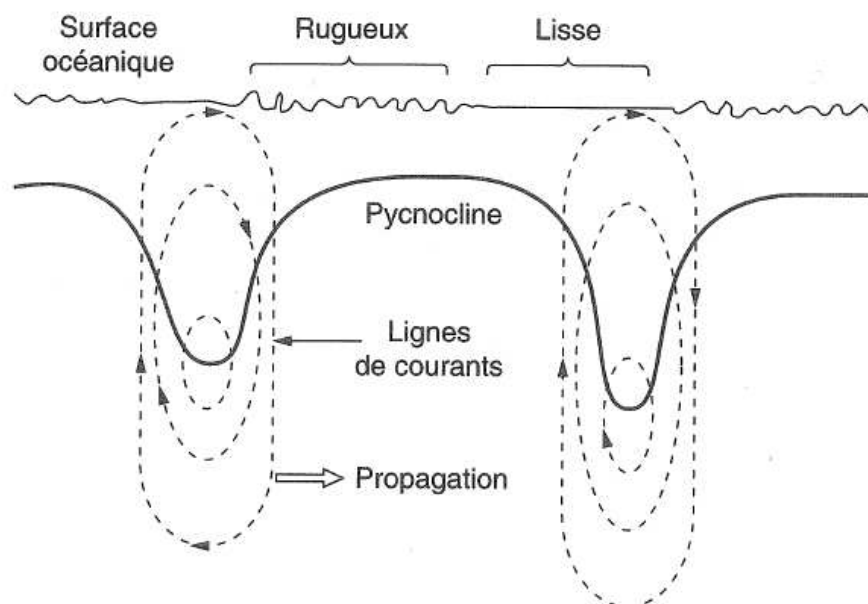


FIG. 2.14 – Vue schématique d'une onde interne.

Les surélévations de surface libre associées sont tout à fait négligeables. Ce ne sont donc pas elles qui permettent de détecter visuellement la présence d'une onde interne mais, indirectement, le courant associé : celui-ci interagit avec les vagues de surface en modifiant, localement, leur hauteur et leur longueur d'onde, voire en accentuant ou neutralisant leur déferlement. Les ondes internes apparaissent ainsi très bien sur certains clichés satellitaires (figure 2.15).

Pour que des ondes internes soient générées, il faut que la masse d'eau soit déjà en mouvement, par exemple sous l'effet de la marée ou de courants océaniques, et qu'elle rencontre un accident de bathymétrie, par exemple le talus continental ou un seuil. Quand les conditions requises (stratification, forts courants, bathymétrie variable) sont remplies, les courants associés aux ondes internes produites peuvent atteindre des valeurs appréciables, de l'ordre de 1 ou 2 m/s.

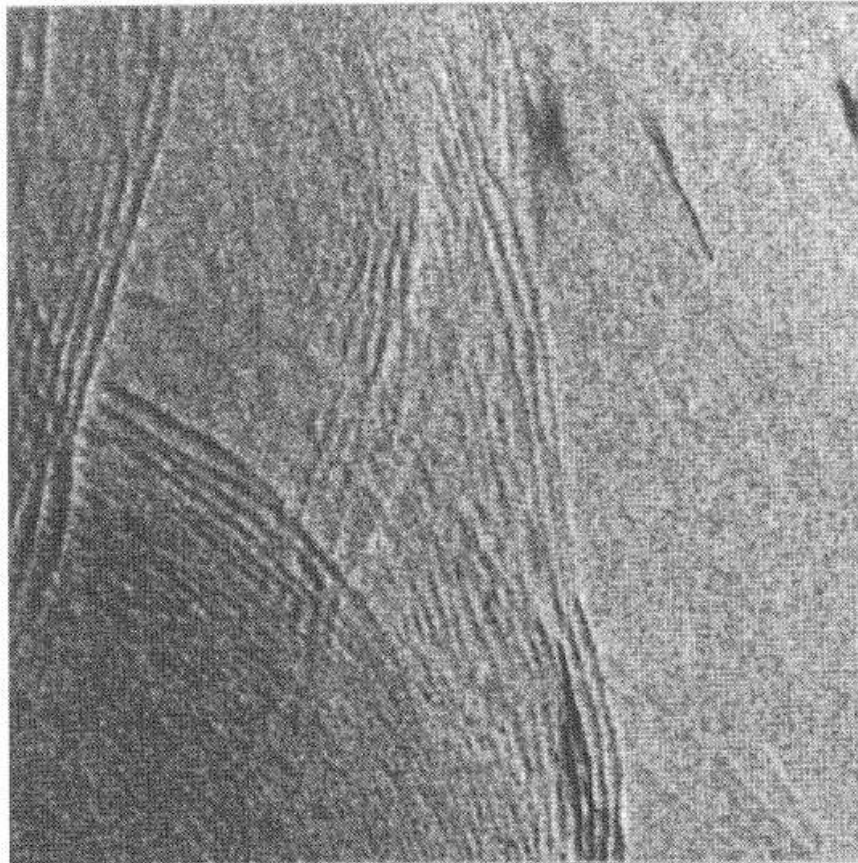


FIG. 2.15 – *Cliché satellitaire montrant des ondes internes.*

2.5 Variation du niveau moyen

La hauteur de pont des structures offshore doit être telle que celui-ci ne soit jamais atteint par les vagues. Pour des plates-formes fixes cela implique de prendre en compte les variations possibles du niveau moyen de surface libre.

Contribuent à cette variation de niveau moyen les marées, mais aussi les surélévations dues aux variations de pression atmosphérique, souvent amplifiées lors des tempêtes (*storm surges*). Un phénomène qui préoccupe aussi les opérateurs est celui de la subsidence des gisements après plusieurs années de production (si le pétrole extrait n'est pas compensé par injection d'eau). Sur le champ d'Ekofisk en Mer du Nord, mis en production au début des années 70, la subsidence s'est traduite par un affaissement de plusieurs mètres du fond marin, si bien qu'il s'est avéré nécessaire de relever d'autant le pont des plates-formes.

2.6 Combinaison des valeurs de design

Pour clore ce chapitre, on veut juste mentionner la difficulté qu'il peut y avoir à associer des conditions extrêmes de houle, vent et courant, sans se pénaliser excessivement au niveau du design. La probabilité de rencontrer simultanément les conditions centenales de chacune de ces trois composantes est excessivement faible (même si houle et vent sont fortement corrélés). Il se pose également le problème de définir les directions prises par chacune.

Chapitre 3

MODELISATION DE LA HOULE

Dans ce chapitre on s'intéresse aux différentes manières utilisées pour décrire, mathématiquement, la houle, de façon à permettre, in fine, le dimensionnement des structures offshore.

Il existe, dans la littérature, de nombreuses théories de houle : linéaires, non linéaires, rotationnelles, irrotationnelles, régulières, irrégulières, mono ou multi-directionnelles, en faible ou grande profondeur d'eau, etc. En génie côtier des ouvrages entiers sont consacrés à leur description et à l'étude de la propagation des vagues sur des fonds variables, ou de leur interaction avec les courants.

On ne décrit ici que les modèles habituellement utilisés en offshore pétrolier, où l'on se trouve généralement loin de la côte, dans des profondeurs d'eau à peu près constantes localement, et relativement grandes devant la longueur d'onde.

Bien que la houle soit générée par le vent, qui crée un cisaillement à la surface libre, et bien qu'il existe un modèle exact de houle rotationnelle (la houle trochoïdale, ou de Gerstner, avec malheureusement le rotationnel dans le mauvais sens), l'usage est d'utiliser des modèles de houles irrotationnelles. On décrit ainsi plutôt la propagation d'une houle hors de sa zone de génération, ou celle produite en bassin par un batteur. Les hypothèses de fluide parfait et d'écoulement irrotationnel permettent de grandement simplifier le problème cinématique par l'introduction du potentiel de vitesse $\Phi(x,y,z,t)$, grandeur scalaire dont le gradient fournit le champ de vitesses :

$$\vec{V}(x,y,z,t) = \nabla\Phi(x,y,z,t) \quad (3.1)$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

L'irrotationalité de l'écoulement est alors automatiquement vérifiée. La conservation de la masse ($\text{div } \vec{V} = 0$ pour un fluide incompressible) se traduit par la condition de nullité du Laplacien du potentiel, dans le domaine fluide :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2)$$

La pression est alors obtenue partout dans le domaine fluide par la relation de Bernoulli-Lagrange :

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla\Phi)^2 \quad (3.3)$$

où la pression de référence p_0 est égale à la pression atmosphérique. Le repère xyz est tel que $z = 0$ corresponde avec le plan moyen de surface libre.

Une catégorisation importante des théories de houle est liée aux rapports respectifs des trois paramètres géométriques : crête à creux ($H = 2A$), longueur d'onde ($L = 2\pi/k$) et profondeur d'eau (h). La répartition entre théories en eau peu profonde et théories en eau profonde (ou intermédiaire) est liée à la valeur prise par le paramètre d'Ursell :

$$U_r = \frac{k A}{(k h)^3} = \frac{H L^2}{8 \pi^2 h^3} \quad (3.4)$$

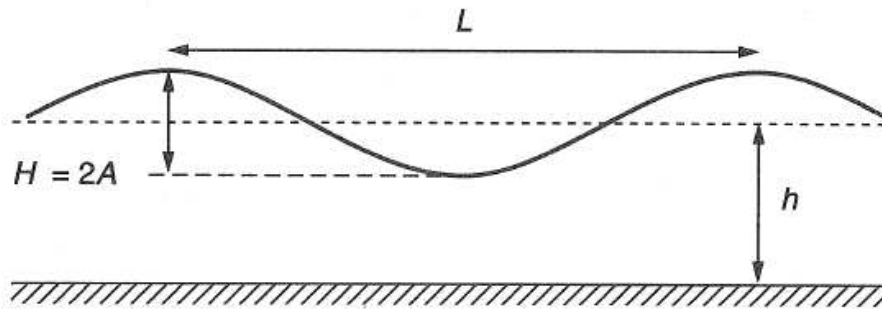


FIG. 3.1 – Longueurs caractéristiques.

Une valeur de U_r petite devant 1 signifie que les effets de dispersion sont prépondérants devant les effets non linéaires. Une solution au problème peut être recherchée en développant le potentiel Φ sur la base du paramètre $k A \equiv \varepsilon$:

$$\Phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} + \dots \quad (3.5)$$

C'est la procédure dite de Stokes qui conduit aux modèles de houles régulières portant son nom. Un modèle d'ordre N signifie ainsi que le développement est tronqué à cet ordre, les termes suivants étant omis.

A l'inverse une valeur du paramètre d'Ursell grande devant 1 conduit à prendre comme petit paramètre le ratio h/L . On aboutit alors aux modèles de houle cnoïdale et d'onde solitaire.

Dans la plupart des applications offshore la profondeur d'eau est suffisamment grande pour que le modèle de Stokes soit applicable. Les théories de houles cnoïdales ou d'ondes solitaires sont rarement utilisées, sauf pour quelques problèmes particuliers comme l'atterrissage des pipes. Elles ne sont pas décrites ici.

A noter que le modèle dit de Fourier, ou de fonction de courant, décrit au paragraphe 3.5, est affranchi de ces limitations et qu'il est utilisable quelle que soit la valeur prise par le paramètre d'Ursell.

Enfin le modèle de houle utilisé doit être compatible avec l'usage que l'on veut en faire, à savoir prédire le chargement d'une structure et son comportement dynamique sous houle. Différents cas de figure se présentent suivant que la structure considérée est un grand corps ou un petit corps, et suivant qu'elle est fixe ou mobile (ou «souple»).

Par définition un petit corps perturbe peu la houle incidente. Les efforts hydrodynamiques sont reliés directement à sa cinématique (vitesse et accélération) par le biais de la fameuse formule de Morison. Toutes les théories de houle sont a priori applicables dès lors qu'elles fournissent ce champ cinématique, en tout point du domaine fluide et à tout instant. Par exemple des modèles de houle régulière de Stokes d'ordre 3 ou 5 sont classiquement utilisés pour dimensionner les jackets.

A l'inverse un grand corps modifie de façon sensible la houle incidente et le calcul des efforts hydrodynamiques nécessite de résoudre le problème de diffraction. Pour une structure mobile il faut aussi tenir compte du champ de vagues émis dans son mouvement (problème de radiation). La houle incidente étant spécifiée suivant le modèle de Stokes, en l'état actuel des connaissances on ne sait résoudre le problème de diffraction qu'aux premier et deuxième ordres d'approximation. Les travaux menés sur la résolution du problème de diffraction au troisième ordre en sont encore à un stade très académique ; ils ne semblent pas devoir conduire très rapidement à des modèles utilisables pour le dimensionnement des structures. L'alternative du «bassin à houle numérique» en est aussi à ses balbutiements, au moins en trois dimensions.

Enfin le choix entre modèles de houle régulière ou irrégulière dépend principalement du comportement dynamique de la structure considérée. Une structure fixe et raide comme un jacket est peu sensible à de petites variations en fréquence du contenu énergétique de la houle incidente. Il est justifié de la dimensionner sur la base du concept de houle régulière équivalente, de crête à creux égal au crête à creux de design. L'intérêt est qu'il est alors possible de faire appel à des modèles cinématiques précis, comme le modèle de Stokes d'ordre 5 ou celui de la fonction de courant.

Pour des structures à réponse dynamique cette idéalisation est à rejeter puisqu'elle conduit à concentrer tout le chargement sur quelques raies en fréquence (le fondamental de la houle et ses harmoniques). On conçoit aisément que la coïncidence d'une de ces raies avec une des fréquences propres du mouvement (ou de la déformation) de la structure risque de conduire à une réponse totalement irréaliste. Inversement la non coïncidence risque d'entraîner une sous-estimation. Force est alors de respecter la répartition en fréquence du chargement, donc de la houle, et de représenter celle-ci comme une houle irrégulière. Aux ordres un et deux d'approximation il n'y a pas de difficulté de principe. Par contre il n'existe pas de théorie d'ordre supérieur ou égal à trois permettant la description d'une houle irrégulière.

Dans ce chapitre on suit la démarche de Stokes et on présente les modèles de houle d'ordre un (Airy), deux, trois et cinq, en insistant particulièrement sur l'ordre deux, étroitement associé à certains types de comportement des structures offshore (dérive moyenne, oscillations à basse fréquence, *springing* des plates-formes sur lignes tendues). On expose également le modèle de fonction de courant de Dean. Enfin on présente rapidement quelques aspects de l'évolution spatio-temporelle de la houle, souvent mal connus des concepteurs, comme l'instabilité de Benjamin-Feir.

3.1 Equations générales

On considère un océan infini de profondeur h constante et occupé par un fluide parfait incompressible dont l'écoulement est supposé irrotationnel. On utilise un repère orthonormé

$Oxyz$ tel que Oxy coïncide avec le plan de surface libre au repos et que l'axe Oz soit vertical ascendant. On représente alors la surface libre par :

$$z = \eta(x, y, t) \quad (3.6)$$

(ce qui exclut donc le retournement, difficilement compatible avec les hypothèses de faibles non-linéarités que l'on fait ensuite).

L'écoulement est décrit par un potentiel des vitesses $\Phi(x, y, z, t)$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. Laplacien nul dans le domaine fluide (conservation de la masse) :

$$\Delta\Phi = 0 \quad (3.2)$$

2. Imperméabilité du fond :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \Phi_z = 0 \quad z = -h \quad (3.7)$$

3. Conditions de surface libre :

Condition «cinématique» :

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y = \Phi_z \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3.8)$$

Condition «dynamique» :

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + g z = 0 \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3.9)$$

La condition cinématique exprime que la surface libre est une surface matérielle. La condition dynamique exprime que la pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique : on ignore les effets liés à la tension superficielle, négligeables dès lors que les longueurs d'onde dépassent une dizaine de centimètres.

La difficulté principale provient de ces conditions de surface libre, non linéaires, et affichées sur une surface mal définie ou inconnue a priori. La technique utilisée est de «travailler» dans le domaine fluide au repos $-h \leq z \leq 0$ et de supposer le potentiel des vitesses prolongeable par son développement de Taylor de $z = 0$ à $z = \eta$:

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, 0, t) + z \Phi_z(x, y, 0, t) + \dots \quad 0 \leq z \leq \eta(x, y, t) \quad (3.10)$$

Corrélativement on développe Φ en série d'un petit paramètre ε de perturbation (qu'on identifiera avec la cambrure) :

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots \quad (3.11)$$

où :

$$\Phi^{(1)} = \varepsilon \phi^{(1)} \quad \Phi^{(2)} = \varepsilon^2 \phi^{(2)} \quad \dots \quad (3.12)$$

Et de même pour l'élévation de surface libre :

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots \quad (3.13)$$

où $\eta^{(1)}$ est d'ordre ε , $\eta^{(2)}$ d'ordre ε^2 , etc.

On aboutit alors aux conditions de surface libre suivantes :

Premier ordre :

$$\Phi_{tt}^{(1)} + g \Phi_z^{(1)} = 0 \quad z = 0 \quad (3.14)$$

$$\eta^{(1)} = -\frac{1}{g} \Phi_t^{(1)} \quad z = 0 \quad (3.15)$$

Deuxième ordre :

$$\Phi_{tt}^{(2)} + g \Phi_z^{(2)} = -\eta^{(1)} (\Phi_{ttz}^{(1)} + g \Phi_{zz}^{(1)}) - 2 \nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi_t^{(1)} \quad z = 0 \quad (3.16)$$

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g} \eta^{(1)} \Phi_{zt}^{(1)} - \frac{1}{2g} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - \frac{1}{g} \Phi_t^{(2)} \quad z = 0 \quad (3.17)$$

On peut ainsi continuer au troisième ordre et au-delà mais les développements deviennent rapidement fastidieux aussi on ne les retranscrit pas ici.

3.2 Premier ordre d'approximation

3.2.1 Houle régulière (Airy)

L'hypothèse de départ est celle de la périodicité, en temps (à la période T), et en espace (à une longueur d'onde L à relier à la période T d'une façon à définir). On se restreint aussi à un écoulement bi-dimensionnel, dans un plan vertical, soit xz .

$\omega = 2\pi/T$ étant la pulsation, on peut écrire :

$$\Phi^{(1)}(x,z,t) = \Re \{ \varphi(x,z) e^{-i\omega t} \} \quad (3.18)$$

et le problème à résoudre devient :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{zz} &= 0 && \text{domaine fluide} \\ g \varphi_z - \omega^2 \varphi &= 0 && z = 0 \\ \varphi_z &= 0 && z = -h \\ &&& \text{périodicité en } x \end{aligned} \quad (3.19)$$

On cherche une solution à variables séparées : $\varphi(x,z) = F(x) G(z)$, ce qui est licite d'un point de vue mathématique car le domaine est rectangulaire : $x_0 < x \leq x_0 + L$ $-h \leq z \leq 0$.

La condition de Laplace s'écrit alors :

$$F'' G + F G'' = 0$$

soit, en divisant par $F G$:

$$\frac{F''}{F} + \frac{G''}{G} = 0$$

F''/F est une fonction de x seul, G''/G une fonction de z seul ; ce sont donc nécessairement deux constantes opposées :

$$\frac{F''}{F} = \pm k^2 \qquad \frac{G''}{G} = \mp k^2$$

L'hypothèse de périodicité en x impose de choisir $F''/F = -k^2$ qui a pour solution :

$$F(x) = e^{\pm i k x}$$

Les solutions g associées sont de type exponentiel :

$$G(z) = e^{\pm k z}$$

La vérification de la condition de glissement sur le fond conduit à regrouper les exponentielles positives et négatives en :

$$G(z) = \text{ch } k (z + h)$$

Le potentiel des vitesses φ est alors de la forme :

$$\varphi = C \text{ ch } k (z + h) e^{\pm i k x}$$

C étant une constante.

Il reste à vérifier la condition de surface libre, qui donne :

$$C g k \text{ sh } k h - C \omega^2 \text{ ch } k h = 0$$

soit :

$$\omega^2 = g k \text{ th } k h \tag{3.20}$$

Cette condition, dite **relation de dispersion**, lie la longueur d'onde $L = 2\pi/k$ à la période $T = 2\pi/\omega$:

$$L = \frac{g T^2}{2\pi} \text{ th } \frac{2\pi h}{L} \tag{3.21}$$

Dans le cas général d'une profondeur quelconque cette équation demande à être résolue de manière itérative (la période T étant la donnée et L l'inconnue). Lorsque la profondeur h est suffisamment grande devant la longueur d'onde L (en pratique lorsque $h > L/2$) on est en régime dit de «profondeur infinie», la tangente hyperbolique étant à peu près égale à 1. On a alors :

$$L = \frac{g T^2}{2\pi} = 1,56 T^2 \tag{3.22}$$

(T étant exprimée en secondes et L en mètres).

Le profil de surface libre s'obtient par :

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \Re \left\{ \frac{i\omega}{g} \varphi \right\}_{z=0} \\ &= \Re \left\{ \frac{i\omega}{g} C \text{ ch } k h e^{\pm i k x} e^{-i\omega t} \right\} \end{aligned}$$

On introduit l'amplitude de la houle A reliée à la constante C par :

$$C = -i \frac{A g}{\omega \operatorname{ch} k h}$$

d'où :

$$\eta^{(1)} = A \cos(\pm k x - \omega t) \quad (3.23)$$

et :

$$\Phi^{(1)} = \frac{A g}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} k h} \sin(\pm k x - \omega t) \quad (3.24)$$

Le profil de surface libre est sinusoïdal.

$A \cos(+k x - \omega t)$ représente une onde qui se déplace de la gauche vers la droite (vers les x positifs).

$A \cos(-k x - \omega t)$ représente une onde qui se déplace de la droite vers la gauche.

Plus généralement $A \cos(k x \cos \beta + k y \sin \beta - \omega t)$ représente une onde qui se propage dans une direction faisant un angle β avec l'axe x .

La superposition de deux ondes de sens contraire et de même amplitude est aussi une solution mathématique du problème initial :

$$A \cos(k x - \omega t) + A \cos(-k x - \omega t) = 2 A \cos k x \cos \omega t$$

Cette expression ne représente plus une onde progressive, mais un clapotis, comme il se produit par exemple devant une digue où la houle est réfléchie.

Vitesse de phase et vitesse de groupe

La **vitesse de phase** est définie comme la vitesse à laquelle se déplacent les crêtes et les creux. Ceux-ci sont donnés par $k x - \omega t = n \pi$. D'où :

$$C_P = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} k h} \quad (3.25)$$

Pour $kh \geq 3$ (profondeur «infinie») :

$$C_P = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\omega} = \frac{g T}{2\pi} \quad (3.26)$$

La houle se propage d'autant plus vite que sa période (et sa longueur d'onde) est élevée.

Pour $kh \ll 1$ (faible profondeur), on a $\operatorname{th} k h \simeq k h$ et :

$$C_P = \sqrt{g h} \quad (3.27)$$

La vitesse de phase ne dépend plus de la période, mais seulement de la profondeur.

Le concept de **vitesse de groupe** s'introduit en considérant la superposition de deux houles sinusoïdales de mêmes amplitudes et de pulsations voisines :

$$\begin{aligned}\eta^{(1)} &= A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2 A \cos \left[\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \cos \left[\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right]\end{aligned}$$

On a ainsi un effet de battement qui représente schématiquement des groupes de vagues successifs, plus conformes à la réalité physique qu'une houle sinusoïdale. Les groupes de vagues, définis par $(k_1 - k_2) x - (\omega_1 - \omega_2) t = n \pi$, se déplacent à la vitesse :

$$C_G = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

soit, en passant à la limite $\omega_1 - \omega_2 \rightarrow 0$:

$$C_G = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (3.28)$$

Différenciant la relation de dispersion $\omega^2 = g k \operatorname{th} kh$, on obtient :

$$2 \omega \, d\omega = \left(g \operatorname{th} kh + \frac{g kh}{\operatorname{ch}^2 kh} \right) dk$$

ce qui donne finalement :

$$\frac{C_G}{C_P} = \frac{\partial \omega / \partial k}{\omega / k} = \frac{1}{2} + \frac{kh}{\operatorname{sh} 2kh} \quad (3.29)$$

En grande profondeur ($kh / \operatorname{sh} 2kh \simeq 0$) la vitesse de groupe est égale à la moitié de la vitesse de phase. Ceci explique que si l'on suit des yeux la crête d'une forte vague, au milieu d'un groupe, on la voit progressivement gagner la tête du groupe tout en diminuant en amplitude, au profit des vagues suivantes. On verra plus loin que la vitesse de groupe est aussi la vitesse à laquelle se déplace l'énergie véhiculée par la houle.

En faible profondeur ($\operatorname{sh} 2kh \simeq 2kh$) la vitesse de groupe est égale à la vitesse de phase, toutes les composantes de houle allant à la même vitesse \sqrt{gh} .

La figure 3.2 présente, en fonction de kh , les vitesses de phase C_P et de groupe C_G , normalisées par $\sqrt{g/k}$.

Vitesses orbitales et trajectoires

De l'expression du potentiel des vitesses :

$$\Phi^{(1)}(x, z, t) = \frac{A g}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx - \omega t) \quad (3.30)$$

on déduit immédiatement les composantes de la vitesse fluide :

$$u = \Phi_x^{(1)} = \frac{A g k}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kx - \omega t)$$

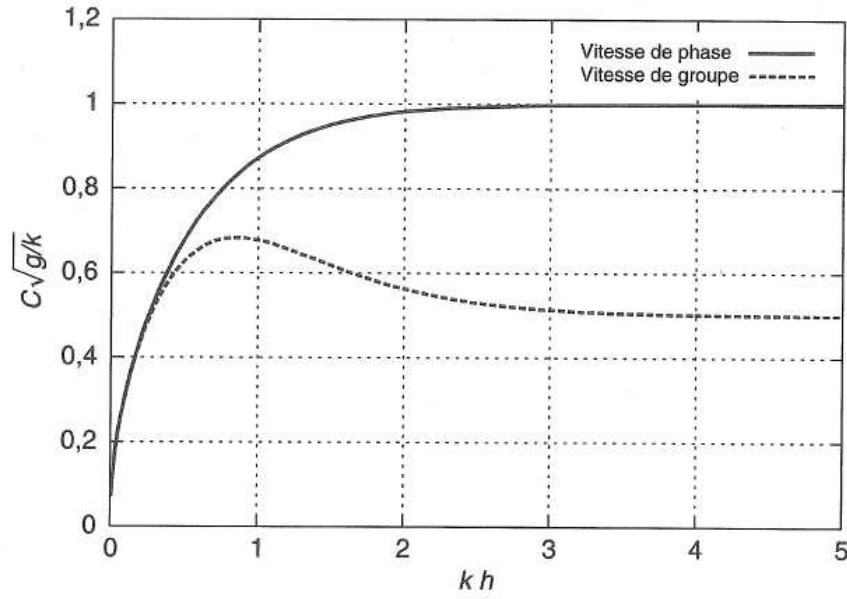


FIG. 3.2 – Vitesse de phase et vitesse de groupe en fonction de kh .

$$= A \omega \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \cos(kx - \omega t) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} w = \Phi_z^{(1)} &= \frac{A g k}{\omega} \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{ch } kh} \sin(kx - \omega t) \\ &= A \omega \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{sh } kh} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

En profondeur «infinie» ($kh > 3$) ces expressions deviennent :

$$\Phi^{(1)} = \frac{A g}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad (3.33)$$

$$u = A \omega e^{kz} \cos(kx - \omega t) \quad (3.34)$$

$$w = A \omega e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad (3.35)$$

Les trajectoires s'obtiennent en intégrant en temps le système différentiel :

$$\frac{dx}{dt} = u(x, z, t) \quad (3.36)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, z, t) \quad (3.37)$$

Dans le cadre d'une théorie de premier ordre où l'on suppose petits («infinitésimaux») les déplacements fluides, on peut prendre les composantes u et w de la vitesse au point moyen (x_0, z_0) et donc intégrer :

$$\frac{dx}{dt} = u(x_0, z_0, t) = A \omega \frac{\text{ch } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x_0, z_0, t) = A \omega \frac{\text{sh } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \sin(k x_0 - \omega t)$$

ce qui donne :

$$x = x_0 - A \frac{\text{ch } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \sin(k x_0 - \omega t) \quad (3.38)$$

$$z = z_0 + A \frac{\text{sh } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \cos(k x_0 - \omega t) \quad (3.39)$$

Les trajectoires des particules fluides, au premier ordre d'approximation, sont donc des ellipses, d'autant plus aplaties qu'on se rapproche du fond où elles se réduisent à un mouvement de va et vient. En profondeur infinie ($kh > 3$ en pratique) ce sont des cercles, dont le rayon décroît de façon exponentielle avec l'immersion z .

Ces trajectoires sont illustrées sur la figure 3.3.

Transport de masse

On n'a obtenu ci-dessus que le premier ordre d'approximation des trajectoires. De façon inconsistante, mais qui peut se justifier lorsqu'on s'intéresse à des valeurs moyennes en temps, on peut calculer un deuxième ordre d'approximation en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(x, z, t) &= u(x_0 + x - x_0, z_0 + z - z_0, t) \\ &\simeq u(x_0, z_0, t) + (x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, z_0, t) + (z - z_0) \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, z_0, t) \end{aligned}$$

Introduisant dans ces relations les $x - x_0$ et $z - z_0$ déterminés en première approximation, on obtient :

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = A^2 k \omega \frac{\text{ch}^2 k(z_0 + h)}{\text{sh}^2 kh} \sin^2(k x_0 - \omega t) + A^2 k \omega \frac{\text{sh}^2 k(z_0 + h)}{\text{sh}^2 kh} \cos^2(k x_0 - \omega t)$$

dont la valeur moyenne en temps n'est pas nulle :

$$\overline{\frac{dx^{(2)}}{dt}} = \frac{1}{2} A^2 k \omega \frac{\text{ch } 2k(z_0 + h)}{\text{sh}^2 kh} \quad (3.40)$$

Les trajectoires ne sont donc pas rigoureusement fermées. Les particules fluides tendent à dériver dans le sens de propagation de la houle. La figure 3.4 montre un cas de trajectoire obtenue en intégrant exactement en temps les équations (3.36) et (3.37), pour une particule à la surface libre en profondeur infinie. La cambrure kA est prise égale à $0,1 \times \pi$, soit $H/L = 10 \%$. On constate que la vitesse de dérive est conséquente.

Le débit s'obtient en intégrant $\overline{dx^{(2)}/dt}$ sur la tranche d'eau :

$$Q = \int_{-h}^0 \frac{1}{2} A^2 k \omega \frac{\text{ch } 2k(z_0 + h)}{\text{sh}^2 kh} dz_0 = \frac{1}{2} A^2 \omega \coth kh \quad (3.41)$$

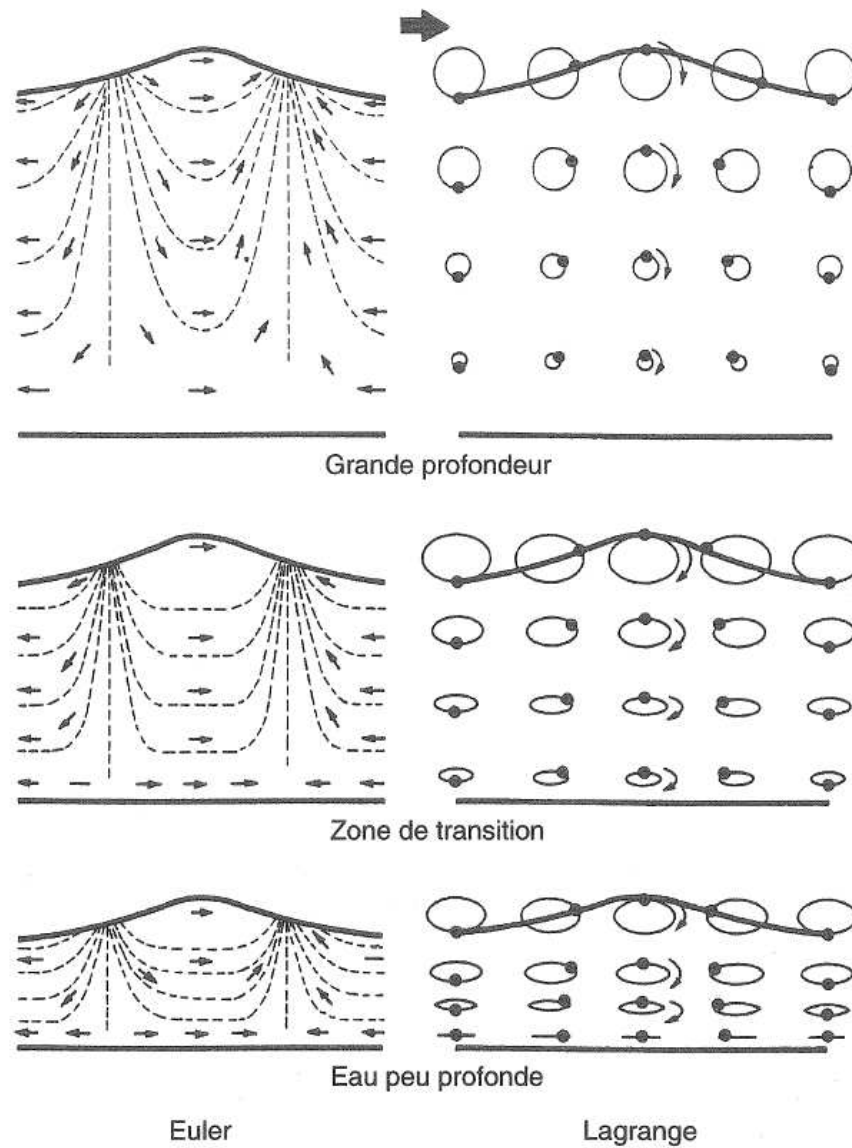


FIG. 3.3 – *Mouvements orbitaux des particules fluides.*

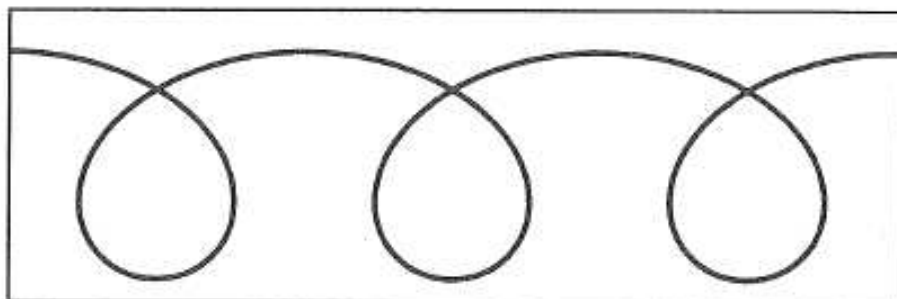


FIG. 3.4 – *Trajectoire obtenue en intégrant exactement en temps les équations (3.36) et (3.37).*

On peut retrouver le même résultat en adoptant un point de vue eulérien, c'est à dire en intégrant $u(x,z,t)$ de $-h$ à $\eta^{(1)}(x,t)$, et en en prenant la valeur moyenne en temps qui, à l'ordre d'approximation considéré, se réduit à :

$$Q = \overline{u(x,0,t) \eta(x,t)} = \frac{1}{2} A^2 \omega \coth kh \quad (3.42)$$

Lorsqu'on génère de la houle dans un canal de longueur finie, le transport de masse est nécessairement compensé par un courant de retour, dont la vitesse est donnée par (en supposant un profil uniforme, seul compatible avec l'hypothèse d'écoulement irrotationnel) :

$$u_R = -\frac{1}{2} \frac{A^2 \omega}{h} \coth kh \quad (3.43)$$

Cette vitesse n'est pas négligeable. Par exemple une amplitude A de 25 centimètres et une période $T = 2\pi/\omega$ de 2 secondes donnent une vitesse de 5 centimètres par seconde pour une profondeur h de 2 mètres, correspondant, à une échelle du cinquantième, à 0,35 m/s au réel.

Il peut être nécessaire de tenir compte de l'apparition du courant de retour pour définir ou interpréter des essais en bassin.

Au réel il se superpose en général à la houle quelque courant, de marée ou océanique. Compte tenu du transport de masse induit par la houle, il résulte quelque ambiguïté dans la définition du courant associé. On parle généralement de courant **eulérien** ou **lagrangien** suivant qu'on exclut ou inclut l'effet du transport de masse dans la spécification du courant.

Énergie et flux d'énergie

On considère un domaine fluide Ω limité par le fond marin (S_F), la surface libre (S_L) et deux verticales (S_1 , S_2) espacées d'une longueur d'onde.

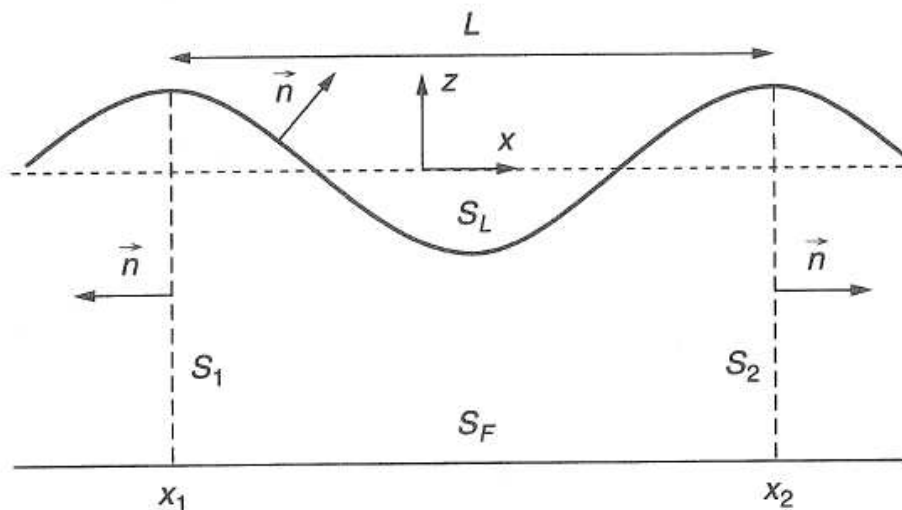


FIG. 3.5 – Géométrie.

L'énergie se décompose en énergie potentielle E_P et énergie cinétique E_C .

L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_P = \iint_{\Omega} \rho g z \, dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \rho g (\eta^2 - h^2) \, dx$$

ce qui donne (en éliminant la contribution statique $-1/2 \rho g h^2$) :

$$E_P = \frac{1}{2} \rho g A^2 \int_{x_1}^{x_2} \cos^2(kx - \omega t) \, dx = \frac{1}{4} \rho g A^2 L$$

L'énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \iint_{\Omega} (\nabla \Phi)^2 \, dS$$

se transforme en :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \int_{S_1 \cup S_F \cup S_2 \cup S_L} \Phi \nabla \Phi \cdot \vec{n} \, dl$$

\vec{n} étant la normale extérieure.

La contribution due à l'intégration sur le fond marin est nulle. Celles relatives à S_1 et S_2 se compensent de par la périodicité. Il ne reste donc plus que celle à la surface libre, que l'on approxime à partir des expressions de Φ et Φ_z en $z = 0$:

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi \Phi_z \Big|_{z=0} \, dx$$

On obtient alors :

$$E_C = \frac{1}{4} \rho g A^2 L$$

L'énergie totale est donc :

$$E = \frac{1}{2} \rho g A^2 L \tag{3.44}$$

Elle se répartit également en énergie cinétique et énergie potentielle.

On exprime maintenant la variation temporelle de l'énergie dans le domaine :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \rho \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g z \right] \, dS \right\} \\ &= \rho \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g z \right] \, dS + \int_{S_L} \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g z \right] \vec{U} \cdot \vec{n} \, dl \end{aligned}$$

où \vec{U} est la vitesse de déplacement de la surface libre.

Le premier terme se transforme en :

$$\begin{aligned} \rho \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g z \right] \, dS &= \rho \iint_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi_t \, dS \\ &= \rho \int_{S_1 \cup S_L \cup S_2 \cup S_F} \Phi_t \nabla \Phi \cdot \vec{n} \, dl \end{aligned}$$

si bien que, l'intégrale sur le fond étant nulle :

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_{S_1 \cup S_2} \Phi_t \nabla \Phi \cdot \vec{n} \, dl + \rho \int_{S_L} \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g z + \Phi_t \right] \vec{U} \cdot \vec{n} \, dl$$

soit, la pression à la surface libre étant égale à la pression atmosphérique, supposée constante :

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_{S_1 \cup S_2} \Phi_t \nabla \Phi \cdot \vec{n} \, dl$$

Lorsque S_1 et S_2 sont espacées d'une longueur d'onde, les intégrales sur S_1 et S_2 se compensent et on obtient que $dE/dt \equiv 0$, ce qui ne nous apprend rien. L'exercice paraît donc sans intérêt. Il montre en fait que la quantité d'énergie qui pénètre dans le domaine par unité de temps, ou **flux d'énergie**, est donnée par :

$$F_L(x) = -\rho \int_{-h}^{\eta} \Phi_t \Phi_x \, dz \simeq -\rho \int_{-h}^0 \Phi_t \Phi_x \, dz \quad (3.45)$$

Effectuant ce calcul, et en prenant la valeur moyenne en temps, on obtient :

$$\bar{F}_L = \frac{1}{4} \rho A^2 g \frac{\omega}{k \operatorname{sh} 2kh} (2kh + \operatorname{sh} 2kh) \quad (3.46)$$

Le rapport $\bar{F}_L/(E/L)$ exprime la vitesse moyenne à laquelle se déplace l'énergie. On obtient alors que cette vitesse est identique à la vitesse de groupe C_G définie précédemment.

3.2.2 Houle irrégulière (multichromatique)

Au premier ordre d'approximation on représente une houle irrégulière comme la superposition d'un grand nombre de houles d'Airy élémentaires dont les amplitudes sont déduites du spectre d'énergie. On écrit donc l'élévation de surface libre sous la forme :

$$\eta^{(1)}(x,y,t) = \sum_i A_i \cos[k_i (x \cos \beta_i + y \sin \beta_i) - \omega_i t + \theta_i] \quad (3.47)$$

avec :

$$A_i^2 = 2S(\omega_i, \beta_i) \delta\omega_i \delta\beta_i \quad (3.48)$$

où $S(\omega, \beta)$ est le spectre directionnel.

Le caractère supposé gaussien de la houle implique que les phases θ_i soient aléatoires et équi-distribuées dans $[0 \ 2\pi]$.

La linéarité du problème conduit à exprimer le potentiel des vitesses comme la simple superposition des potentiels élémentaires de chacune des composantes :

$$\Phi^{(1)}(x,y,z,t) = \sum_i \frac{A_i g}{\omega_i} \frac{\operatorname{ch} k_i(z+h)}{\operatorname{ch} k_i h} \sin \left[k_i (x \cos \beta_i + y \sin \beta_i) - \omega_i t + \theta_i \right] \quad (3.49)$$

De cette expression on peut déduire la cinématique incidente dans tout le domaine fluide. Ainsi la composante suivant l'axe Ox de la vitesse en un point (x,y,z) s'écrit :

$$u(x,y,z,t) = \Phi_x^{(1)}(x,y,z,t) = \sum_i A_i \omega_i \cos \beta_i \frac{\operatorname{ch} k_i(z+h)}{\operatorname{sh} k_i h} \cos \left[k_i (x \cos \beta_i + y \sin \beta_i) - \omega_i t + \theta_i \right] \quad (3.50)$$

Si l'on désire rester dans le domaine spectral, on peut par exemple relier le spectre de la vitesse suivant Ox à la cote z au spectre de l'élévation. De ce qui précède on tire en effet aisément :

$$S_u(\omega, z) = \omega^2 \frac{\operatorname{ch}^2 k(z+h)}{\operatorname{sh}^2 kh} \int_0^{2\pi} S(\omega, \beta) \cos^2 \beta \, d\beta \quad (3.51)$$

où le nombre d'onde k dépend de la pulsation ω via la relation de dispersion :

$$\omega^2 = g k \operatorname{th} kh$$

On peut alors en déduire l'écart type de la vitesse :

$$\sigma_u(z) = \sqrt{\int_0^\infty S_u(\omega, z) \, d\omega} \quad (3.52)$$

et sa période moyenne up-crossing à partir des moments d'ordre 0 et 2, comme on l'a fait pour l'élévation de houle au chapitre précédent. Connaissant la durée de l'état de mer considéré on peut définir une valeur maximale de la vitesse horizontale. Ce genre d'approche est par exemple utilisé pour définir des valeurs de design de la vitesse et de l'accélération sur le fond marin, d'intérêt pour les études de stabilité des pipelines.

3.2.3 Validité de l'approximation de premier ordre

Strictement la houle d'Airy n'est une solution correcte que pour des houles d'amplitude infinitésimale. Il est donc légitime de se demander dans quelle mesure on peut l'appliquer pour des houles d'amplitude finie, et à partir de quelle amplitude il convient de faire appel à d'autres modèles. (Ainsi qu'on l'a mentionné en introduction de ce chapitre, on suppose que la profondeur d'eau est relativement importante — supérieure au cinquième de la longueur d'onde. On écarte donc d'entrée toutes les limitations de la théorie liées à l'insuffisance de la profondeur).

Houle régulière

On se place, pour simplifier les écritures, en profondeur infinie. Soit donc la houle de potentiel :

$$\Phi^{(1)}(x, z, t) = \frac{Ag}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

et d'élévation :

$$\eta^{(1)}(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Les conditions de Laplacien nul et de décroissance pour $z \rightarrow -\infty$ sont exactement satisfaites par le potentiel. Il reste à s'assurer à combien près les conditions dynamique et cinématique de surface libre le sont. Soit donc, en retenant par exemple la condition dynamique, à comparer :

$$\eta^{(1)} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{g} \Phi_t^{(1)} - \frac{1}{2g} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \quad \text{pour} \quad z = \eta$$

$$A \cos \theta \stackrel{?}{=} A \cos \theta e^{k A \cos \theta} - \frac{1}{2} k A^2 e^{2 k A \cos \theta}$$

$$A \cos \theta \stackrel{?}{=} A \left[\cos \theta + \frac{1}{2} k A \cos 2\theta + O(k^2 A^2) \right] \quad (3.53)$$

où $\theta = kx - \omega t$

La différence relative des deux membres est d'ordre kA . On peut vérifier de même que la condition cinématique est satisfaite avec une erreur relative d'ordre kA (figure 3.6).

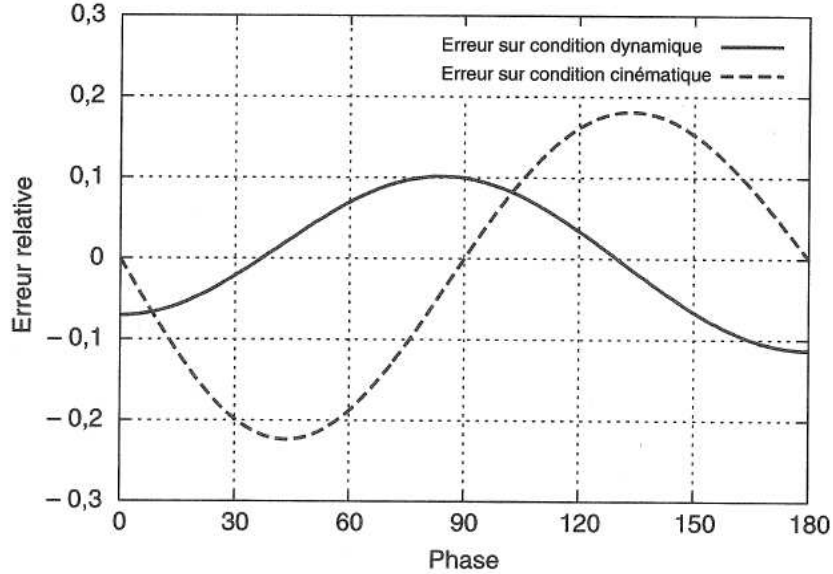


FIG. 3.6 – Houle d'Airy. Erreurs relatives sur les conditions de surface libre. $kA = 0,2$; $kh = 3$.

La houle d'Airy est donc une d'autant meilleure représentation de la houle régulière que la cambrure kA est petite.

Houle bichromatique

On considère maintenant une houle formée de la superposition de deux houles d'Airy, d'élévation de surface libre :

$$\eta^{(1)}(x,t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t) = A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2$$

et de potentiel :

$$\Phi^{(1)} = \frac{A_1 g}{\omega_1} e^{k_1 z} \sin \theta_1 + \frac{A_2 g}{\omega_2} e^{k_2 z} \sin \theta_2$$

La condition dynamique de surface libre s'écrit maintenant :

$$A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2 \stackrel{?}{=} A_1 \exp[k_1(A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2)] \cos \theta_1 + A_2 \exp[k_2(A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2)] \cos \theta_2$$

$$- \frac{1}{2} k_1 A_1^2 \exp[2k_1(A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2)] - \frac{1}{2} k_2 A_2^2 \exp[2k_2(A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2)]$$

$$- A_1 A_2 \frac{\omega_1 \omega_2}{g} \exp[(k_1 + k_2)(A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2)] \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Dans les exponentielles apparaissent des termes en k_1A_1 , k_1A_2 , k_2A_1 et k_2A_2 . Pour que la condition dynamique de surface libre soit à peu près satisfaite, il ne suffit donc pas que les deux cambrures «individuelles» k_1A_1 et k_2A_2 soient petites. Il faut également que les cambrures «croisées» k_1A_2 et k_2A_1 le soient.

Cette restriction supplémentaire pose un problème lorsque les deux pulsations ω_1 et ω_2 sont très différentes. Si l'on considère par exemple deux houles de périodes 15 et 5 secondes, et d'amplitudes 5 et 0,5 mètres, les cambrures individuelles valent respectivement 0,09 et 0,08, alors que la cambrure croisée k_2A_1 vaut 0,8! Manifestement il n'est pas valide en ce cas de superposer les deux potentiels d'Airy pour obtenir le potentiel global.

3.2.4 Les modèles de stretching

L'inadaptation de la sommation simple des potentiels d'Airy apparaît également lorsque l'on cherche à exprimer la cinématique dans les crêtes d'une houle multichromatique. Les vitesses élémentaires associées aux composantes de haute fréquence prennent des valeurs irréalistes et la cinématique calculée est fortement exagérée. Les répercussions sur le chargement des structures sont importantes, par exemple lorsqu'on exprime les efforts de traînée, proportionnels au carré de la vitesse, sur des structures treillis (jackets ou tours souples).

Le problème, on le comprend, comme pour la condition dynamique (ou cinématique) de surface libre, provient de ce que l'on utilise, comme niveau de référence des ondes courtes, le niveau $z = 0$, alors qu'en fait elles chevauchent les ondes longues. Intuitivement on sent que c'est le profil des ondes longues qu'il faudrait utiliser comme niveau «zéro», mais il n'y a malheureusement pas de manière simple de faire les choses correctement, surtout lorsqu'on veut superposer N composantes élémentaires sans séparation nette entre les ondes longues et les ondes courtes.

Face à ce problème différents remèdes empiriques ont été proposés, qui consistent à jouer sur les profondeurs d'eau et élévations de référence.

La méthode la plus sommaire consiste à utiliser la sommation directe :

$$u(x,z,t) = \sum_i A_i \omega_i \frac{\text{ch } k_i(z+h)}{\text{sh } k_i h} \cos[k_i x - \omega_i t + \theta_i]$$

pour $-h \leq z \leq 0$, et :

$$u(x,z,t) = \sum_i A_i \omega_i \coth k_i h \cos[k_i x - \omega_i t + \theta_i]$$

pour $0 \leq z \leq \eta^{(1)}(x,t)$. On prend donc la même cinématique de $z = 0$ à $z = \eta^{(1)}(x,t)$ dans la crête (et on procède de la même manière pour la vitesse verticale et pour les accélérations).

Il s'ensuit, pour le profil de vitesse, une rupture de pente, inesthétique et peu physique. Une «amélioration» consiste à prolonger le profil de vitesse, au dessus de $z = 0$, non pas par une verticale, mais par le segment de droite tangent :

$$u(x,z,t) \simeq u(x,0,t) + z \frac{\partial u}{\partial z}(x,0,t)$$

Cette méthode est connue sous le nom d'**extrapolation linéaire**.

Le modèle de **Wheeler** dilate l'échelle verticale (d'où le nom de *stretching*), de manière à retrouver, en $z = \eta^{(1)}$, la cinématique donnée par la théorie linéaire en $z = 0$. On fait ainsi correspondre à la cote z la cote z' donnée par :

$$z' = h \frac{z - \eta^{(1)}}{h + \eta^{(1)}} \quad \text{soit} \quad z' + h = h \frac{z + h}{h + \eta^{(1)}}$$

ce qui donne le profil :

$$u(x, z, t) = \sum_i A_i \omega_i \frac{\text{ch}[k_i h (z + h)/(h + \eta^{(1)})]}{\text{sh } k_i h} \cos[k_i x - \omega_i t + \theta_i]$$

pour $-h \leq z \leq \eta^{(1)}(x, t)$.

On peut aussi jouer sur la profondeur d'eau (**Chakrabarti**) :

$$u(x, z, t) = \sum_i A_i \omega_i \frac{\text{ch } k_i (z + h)}{\text{sh } k_i (h + \eta^{(1)})} \cos[k_i x - \omega_i t + \theta_i]$$

On remarque que dans ces deux modèles la condition de Laplacien nul du potentiel (qui exprime la conservation de la masse) n'est plus respectée. Il est donc difficile d'asseoir leur validité autrement que par comparaison avec des mesures expérimentales. De nombreuses campagnes ont été effectuées dans ce but, principalement dans de petites installations universitaires, à l'aide de vélocimètres laser. Il en est ressorti que les modèles de Wheeler et Chakrabarti sous-estiment quelque peu les vitesses dans les crêtes.

Le **Delta-stretching**, (Rodenbusch et Forristall) permet de réaliser des profils intermédiaires entre celui du modèle de Wheeler et l'extrapolation linéaire.

Le principe est toujours d'associer à la cote physique z une cote z' , et de prendre comme référence de vitesse celle obtenue non pas en $z' = 0$ mais en $z' = \Delta\eta$, où Δ est un paramètre compris entre 0 et 1. Rodenbusch et Forristall compliquent encore la formulation en introduisant un deuxième paramètre h_Δ , hauteur d'eau sur laquelle est effectué le stretching. Leur modèle est finalement le suivant :

$$\text{Pour } z < -h_\Delta \quad z' = z.$$

Pour $z > -h_\Delta$:

$$z' = (z + h_\Delta) \frac{h_\Delta + \Delta\eta}{h_\Delta + \eta} - h_\Delta$$

z' varie de $-h_\Delta$ à $\Delta\eta$ lorsque z varie de $-h_\Delta$ à η .

Lorsque z' est positif, la cinématique est obtenue à partir de celle en $z' = 0$ par extrapolation linéaire.

Si on prend $h_\Delta = h$ et $\Delta = 0$ on retrouve le modèle de Wheeler ; avec $h_\Delta = h$ et $\Delta = 1$ l'extrapolation linéaire. Des profils de vitesse intermédiaires sont obtenus lorsque Δ varie entre 0 et 1.

Rodenbusch et Forristall préconisent $\Delta = 0,3$ et $h_\Delta = H_S/2$! Cette valeur très faible de h_Δ conduit à des profils présentant une forte rupture de pente. Il semble que leur modèle soit

le plus souvent appliqué avec $h_\Delta = h$.

Il existe, et on peut imaginer, d'autres formulations de stretching. Par exemple on peut améliorer celle de Wheeler en exploitant l'idée que les ondes courtes chevauchent les ondes longues, et en associant à chaque composante de pulsation ω_i un niveau de référence η_i donné par :

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{i-1} A_j \cos(k_j x - \omega_j t + \theta_j)$$

(les pulsations étant rangées par valeurs croissantes) et la cote de calcul :

$$z'_i = h \frac{z - \eta_i}{h + \eta_i}$$

ce qui donne :

$$u(x, z, t) = \sum_i A_i \omega_i \frac{\text{ch} [k_i h (z + h) / (h + \eta_i)]}{\text{sh} k_i h} \cos[k_i x - \omega_i t + \theta_i]$$

Les figures 3.7 et 3.8 présentent, pour la crête et le creux d'une forte vague, tirée d'un état de mer de 15 mètres de H_S et 18 secondes de T_P , les profils de vitesses obtenus en appliquant les cinq formulations :

- modèle linéaire (sans correction) ;
- extrapolation linéaire ;
- Wheeler ;
- Delta-stretching avec $\Delta = 0,5$ et $h_\Delta = h = 100$ m ;
- modèle de Wheeler corrigé comme indiqué ci-dessus.

Sur ce cas les écarts de vitesse dans la crête, entre les deux formulations extrêmes (Wheeler et linéaire), sont de l'ordre de 40 %. Cela signifie 100 % de différence pour les forces de traînée ! A l'inverse de ce qui se passe dans la crête, dans le creux la formulation de Wheeler conduit aux plus fortes vitesses (en module).

Comme il a déjà été écrit il n'y a guère d'autres méthodes, pour valider tel ou tel modèle de stretching, que la comparaison directe avec des profils de vitesse mesurés. Apparemment les nombreuses campagnes expérimentales réalisées n'ont pas permis de trancher. Il y a à cela de nombreuses raisons : précision du système de vélocimétrie utilisé, effets parasites présents dans les bassins ou canaux à houle (courant de retour, ondes longues, effets visqueux), et surtout importance des effets non linéaires absents des modèles de stretching. On présente sur la figure 3.9 un exemple de comparaison entre vitesses mesurées et vitesses calculées par la méthode de Wheeler (les fortes vitesses horizontales mesurées à $t = 37$ s sont dues au déferlement glissant de la vague).

3.3 Deuxième ordre d'approximation

On rappelle le problème aux limites satisfait par le potentiel de deuxième ordre :

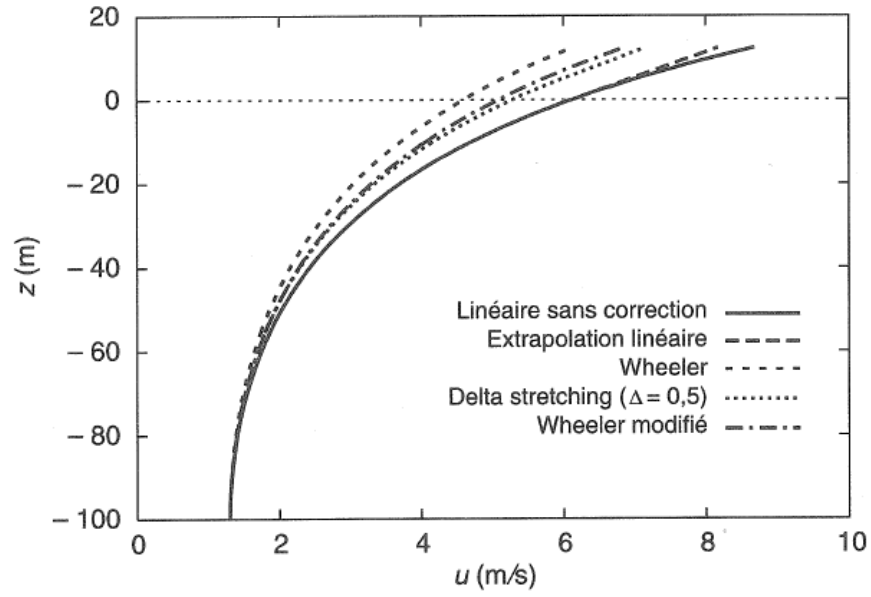


FIG. 3.7 – Comparaison de modèles de stretching. Vitesse horizontale dans la crête.

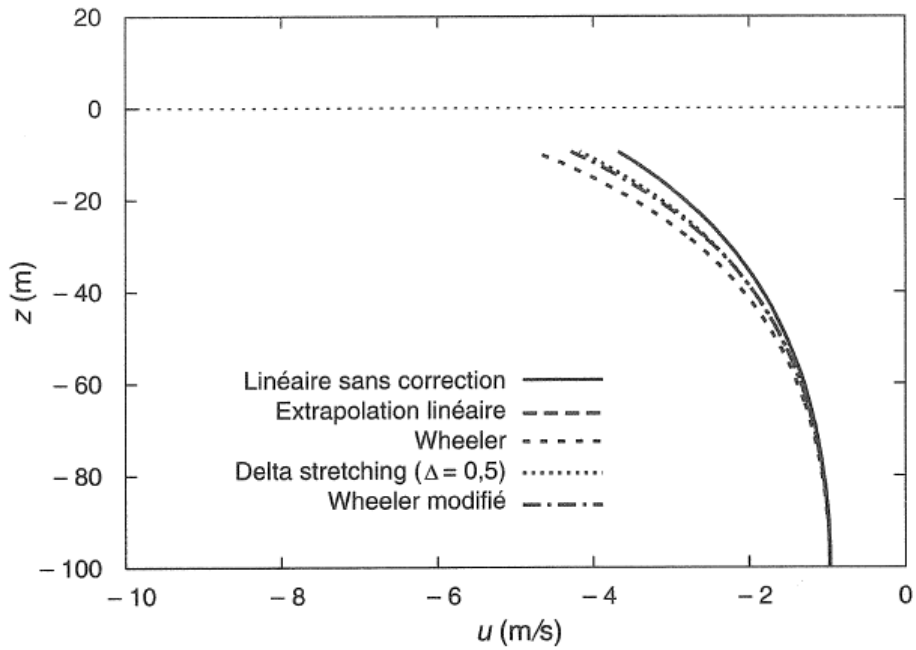


FIG. 3.8 – Comparaison de modèles de stretching. Vitesse horizontale dans le creux.

Nullité du Laplacien dans le domaine fluide :

$$\Delta\Phi^{(2)} = 0 \quad -h \leq z \leq 0 \quad (3.54)$$

Condition de glissement sur le fond :

$$\Phi_z^{(2)} = 0 \quad z = -h \quad (3.55)$$

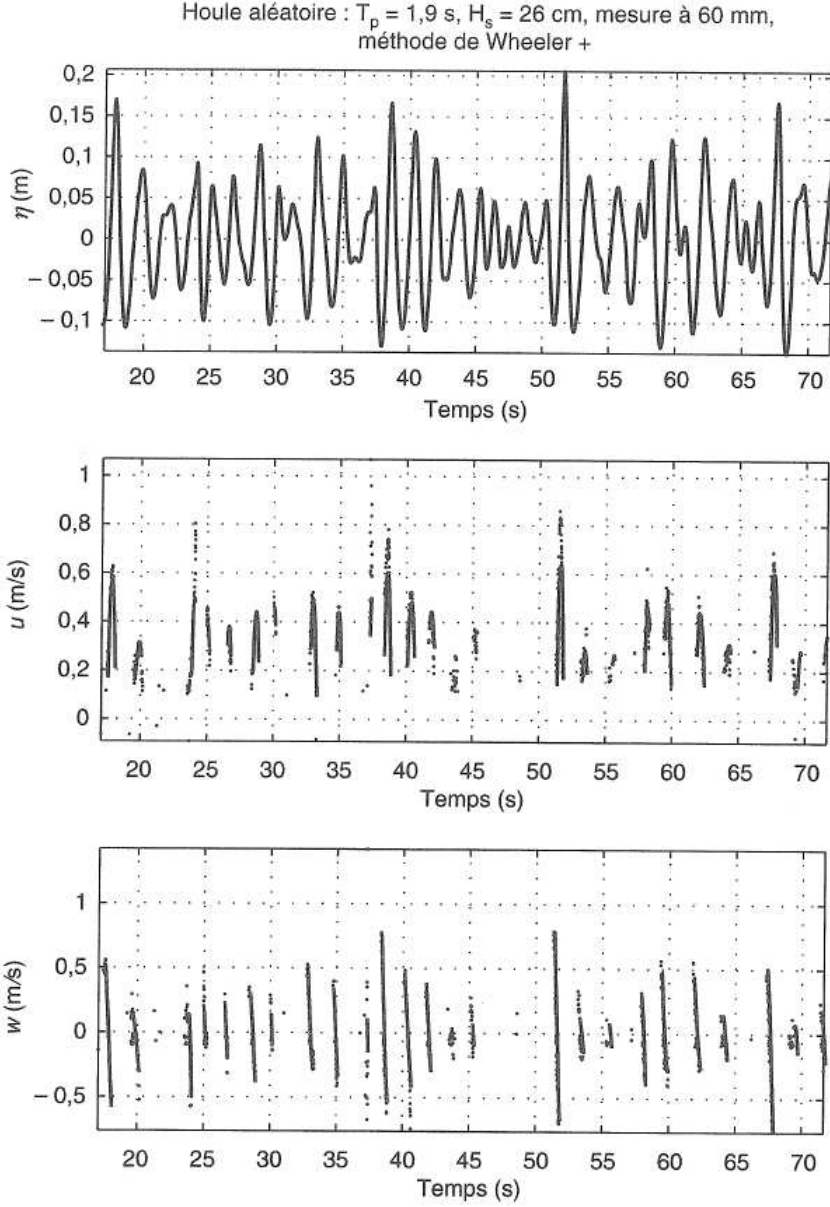


FIG. 3.9 – Mesure de vitesses dans les crêtes d'une houle irrégulière, par vélocimétrie Laser (LDV). Le point de mesure est à 60 mm au dessus du niveau moyen.

– Haut : élévation de surface libre.

– Milieu : vitesse horizontale mesurée (points) et calculée suivant la méthode de Wheeler modifiée.

– Bas : vitesse verticale mesurée et calculée.

Condition de surface libre exprimée en son plan moyen :

$$\Phi_{tt}^{(2)} + g \Phi_z^{(2)} = -\eta^{(1)} (\Phi_{ttz}^{(1)} + g \Phi_{zz}^{(1)}) - 2 \nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi_t^{(1)} \quad z = 0 \quad (3.56)$$

La composante de deuxième ordre de l'élévation de surface libre étant donnée par :

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g} \eta^{(1)} \Phi_{zt}^{(1)} - \frac{1}{2g} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - \frac{1}{g} \Phi_t^{(2)} \quad z = 0 \quad (3.57)$$

Pour déterminer le potentiel de deuxième ordre associé à une houle de potentiel de premier ordre donné, on injecte celui-ci (et l'élévation associée de surface libre) dans le deuxième

membre de la condition de surface libre, et on cherche une solution particulière $\Phi^{(2)}$ du problème.

3.3.1 Houle régulière (Stokes ordre 2)

Soit donc au premier ordre d'approximation les profil de surface libre et potentiel :

$$\eta^{(1)}(x,y,t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$\Phi^{(1)}(x,y,z,t) = \frac{A g}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kx - \omega t)$$

La condition de surface libre vérifiée par $\Phi^{(2)}$ s'écrit :

$$\Phi_{tt}^{(2)} + g \Phi_z^{(2)} = -\frac{3}{2} \frac{A^2 \omega^3}{\operatorname{sh}^2 kh} \sin 2(kx - \omega t) \quad (3.58)$$

Une solution particulière satisfaisant la condition de Laplacien nul et les deux conditions aux limites en $z = 0$ et $z = -h$ est :

$$\Phi^{(2)}(x,y,t) = \frac{3}{8} \frac{A^2 \omega}{\operatorname{sh}^4 kh} \operatorname{ch} 2k(z+h) \sin 2(kx - \omega t) - g \delta^{(2)} t \quad (3.59)$$

La composante de deuxième ordre de l'élévation de surface libre est alors :

$$\eta^{(2)}(x,t) = \frac{A^2 k}{4} (3 \operatorname{coth}^3 kh - \operatorname{coth} kh) \cos 2(kx - \omega t) - \frac{A^2 k}{2 \operatorname{sh} 2kh} + \delta^{(2)} \quad (3.60)$$

Le choix $\delta^{(2)} = A^2 k / (2 \operatorname{sh} 2kh)$ permet d'assurer la nullité du niveau moyen. On se place ainsi dans la situation d'un bassin d'essais, fonctionnant à volume constant. Si on imagine au contraire une houle régulière générée localement dans un océan infini, la constance de la pression atmosphérique conduit à prendre $\delta^{(2)} = 0$: le niveau moyen baisse légèrement dans la zone affectée par la houle.

Il est important de noter que la pulsation double 2ω et le nombre d'onde double $2k$ ne satisfont pas la relation de dispersion :

$$(2\omega)^2 \neq g (2k) \operatorname{th} (2kh) \quad (3.61)$$

sauf, asymptotiquement, en très faible profondeur d'eau ($kh \rightarrow 0$). L'onde décrite par $\Phi^{(2)}$ ne peut exister indépendamment de l'onde de premier ordre. On parle ainsi d'onde **liée** (*locked* ou *bound wave* en anglais).

La démarche de Stokes suivie ici suppose que la correction apportée par $\Phi^{(2)}$ soit petite devant $\Phi^{(1)}$. Si l'on exprime le rapport des amplitudes de $\Phi^{(2)}$ et $\Phi^{(1)}$ on obtient, pour $kh \rightarrow 0$:

$$\frac{\|\Phi^{(2)}\|}{\|\Phi^{(1)}\|} \simeq \frac{3}{8} \frac{kA}{(kh)^3}$$

soit, au facteur $3/8$ près, le nombre d'Ursell. On vérifie que la convergence du développement de Stokes suppose que la cambrure kA soit petite devant $(kh)^3$.

En profondeur infinie (en pratique telle que $kh \geq 3$) on obtient le résultat remarquable que $\Phi^{(2)}$ est nul. La composante de deuxième ordre de l'élévation de surface libre se réduit à :

$$\eta^{(2)}(x,t) = \frac{1}{2} A^2 k \cos 2(kx - \omega t) \quad (3.62)$$

La correction relative par rapport à $\eta^{(1)}$ est d'ordre kA .

Son effet est de surélever les crêtes et de combler les creux de la sinusoïde initiale.

La figure 3.10 montre les profils de surface libre obtenus, suivant la théorie d'Airy (ordre 1) et à l'ordre 2, pour une cambrure $2A/L$ égale à 10 %, et pour deux valeurs de kh : $kh = 1,5$ et $kh = 3$.

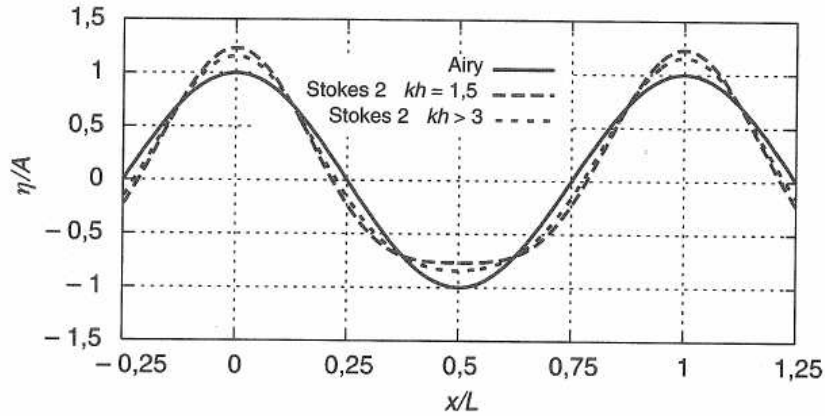


FIG. 3.10 – Profils de surface libre d'une houle régulière suivant le modèle d'Airy et au deuxième ordre d'approximation. $kA = 0,1 \times \pi$, $kh = 1,5$ et $kh = 3$.

3.3.2 Houle bichromatique

C'est le cas de base à considérer pour exprimer ensuite la cinématique de deuxième ordre associée à une houle irrégulière.

On considère donc ici un système de houle formé, au premier ordre d'approximation, de la superposition de deux houles d'Airy. Sans perte de généralité on peut supposer que l'une d'entre elles se propage suivant l'axe Ox et l'autre avec une incidence β :

$$\eta^{(1)}(x,y,t) = A_1 \cos(k_1x - \omega_1t) + A_2 \cos(k_2x \cos \beta + k_2y \sin \beta - \omega_2t)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x,y,z,t) &= \frac{A_1 g}{\omega_1} \frac{\operatorname{ch} k_1(z+h)}{\operatorname{ch} k_1 h} \sin(k_1x - \omega_1t) \\ &+ \frac{A_2 g}{\omega_2} \frac{\operatorname{ch} k_2(z+h)}{\operatorname{ch} k_2 h} \sin(k_2x \cos \beta + k_2y \sin \beta - \omega_2t) \end{aligned}$$

Le deuxième membre de l'équation de surface libre vérifiée par $\Phi^{(2)}$ étant une expression quadratique en $\Phi^{(1)}$ et $\eta^{(1)}$, il prend la forme :

$$Q = \Re \left\{ q_{11} e^{-2i\omega_1 t} + q_{22} e^{-2i\omega_2 t} + q_{12+} e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + q_{12-} e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \right\}$$

Les deux premiers termes représentent l'interaction de chaque onde avec elle même qui a été étudiée au paragraphe précédent. On s'intéresse ici à l'interaction croisée qui fait apparaître une composante en mode somme ($\omega_1 + \omega_2$) et une composante en mode différence ($\omega_1 - \omega_2$). Tous calculs faits on obtient pour Q_{12+} et Q_{12-} :

$$Q_{12+} = q_+ \sin \left[(k_1 + k_2 \cos \beta)x + k_2 \sin \beta y - (\omega_1 + \omega_2)t \right]$$

où :

$$q_+ = -\frac{1}{2}A_1A_2 \left(\frac{\omega_1^3}{\text{sh}^2 k_1 h} + \frac{\omega_2^3}{\text{sh}^2 k_2 h} \right) - A_1A_2 \omega_1\omega_2 (\omega_1 + \omega_2) \left(\frac{\cos \beta}{\text{th} k_1 h \text{ th} k_2 h} - 1 \right) \quad (3.63)$$

$$Q_{12-} = q_- \sin \left[(k_1 - k_2 \cos \beta)x - k_2 \sin \beta y - (\omega_1 - \omega_2)t \right]$$

où :

$$q_- = -\frac{1}{2}A_1A_2 \left(\frac{\omega_1^3}{\text{sh}^2 k_1 h} - \frac{\omega_2^3}{\text{sh}^2 k_2 h} \right) - A_1A_2 \omega_1\omega_2 (\omega_1 - \omega_2) \left(\frac{\cos \beta}{\text{th} k_1 h \text{ th} k_2 h} + 1 \right) \quad (3.64)$$

Si la profondeur d'eau est telle que $k_1 h$ et $k_2 h$ soient supérieurs à 3, ces expressions se simplifient en :

$$q_+ = -A_1A_2 \omega_1\omega_2 (\omega_1 + \omega_2) (\cos \beta - 1) \quad (3.65)$$

$$q_- = -A_1A_2 \omega_1\omega_2 (\omega_1 - \omega_2) (\cos \beta + 1) \quad (3.66)$$

Les potentiels de deuxième ordre associés sont alors :

En mode somme :

$$\begin{aligned} \Phi_+^{(2)}(x,y,z,t) &= \frac{q_+}{-(\omega_1 + \omega_2)^2 + gk_+ \text{th} k_+ h} \frac{\text{ch} k_+(z+h)}{\text{ch} k_+ h} \\ &\times \sin \left[(k_1 + k_2 \cos \beta)x + k_2 \sin \beta y - (\omega_1 + \omega_2)t \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

où :

$$k_+ = \|\vec{k}_1 + \vec{k}_2\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 \cos \beta} \quad (3.68)$$

En mode différence :

$$\begin{aligned} \Phi_-^{(2)}(x,y,z,t) &= \frac{q_-}{-(\omega_1 - \omega_2)^2 + gk_- \text{th} k_- h} \frac{\text{ch} k_-(z+h)}{\text{ch} k_- h} \\ &\times \sin \left[(k_1 - k_2 \cos \beta)x - k_2 \sin \beta y - (\omega_1 - \omega_2)t \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

où :

$$k_- = \|\vec{k}_1 - \vec{k}_2\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \cos \beta} \quad (3.70)$$

Ces résultats appellent un certain nombre de commentaires :

1. Quelles que soient les valeurs prises par ω_1 , ω_2 , et quelle que soit l'orientation relative β , on vérifie que $\omega_1 \pm \omega_2$ et $\|\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2\|$ ne peuvent vérifier la relation de dispersion (sauf dans le cas limite où la profondeur tend vers zéro) :

$$(\omega_1 \pm \omega_2)^2 \neq g \|\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2\| \operatorname{th} \|\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2\| h \quad (3.71)$$

Les ondes décrites par $\Phi_+^{(2)}$ et $\Phi_-^{(2)}$ sont **liées** au système d'onde de premier ordre.

2. Elles se propagent dans des directions différentes, ainsi que le montre la figure 3.11 :

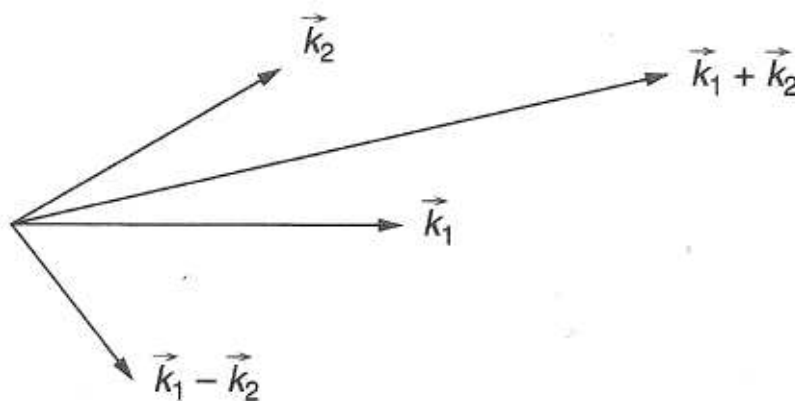


FIG. 3.11 – Vecteurs d'onde $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$ et $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ des composantes de deuxième ordre en houle bichromatique.

3. Deux cas particuliers surgissent lorsque les deux pulsations ω_1 et ω_2 sont voisines :

Pour $\beta = \pi$ le nombre d'onde du mode somme k_+ est très petit. La décroissance de $\Phi_+^{(2)}$ avec la profondeur est alors très lente. Dans le cas $\omega_1 = \omega_2$, $\Phi_+^{(2)}$ ne dépend plus des variables d'espace. Il en résulte une pression dynamique de deuxième ordre qui se fait ressentir dans tout le domaine fluide, et que certains océanographes tiennent pour responsable de micro-séismes. On retrouvera cette situation plus loin lorsqu'on étudiera le problème de diffraction au deuxième ordre, où l'interaction entre l'onde incidente et l'onde réfléchie entraîne l'apparition d'une pression de deuxième ordre qui se fait ressentir à grande profondeur.

Pour $\beta \simeq 0$ on observe un phénomène analogue pour le potentiel de deuxième ordre en mode différence, qui se fait également ressentir à grande profondeur.

Une conclusion importante est que, dès lors qu'on fait entrer en jeu des phénomènes de deuxième ordre, l'action de la houle se fait ressentir à des profondeurs plus grandes qu'une demi-longueur d'onde.

3.3.3 Houle irrégulière

Il «suffit» de généraliser les résultats précédents à tous les couples (ω_i, ω_j) de pulsations présentes dans le signal houle. Dans le cas général d'une houle multidirectionnelle en profon-

leur limitée les écritures sont assez lourdes, et il n'y a pas de difficulté de principe. Aussi on se limite ici au cas d'une houle **unidirectionnelle par grande profondeur**, c'est à dire telle qu'elle puisse être considérée comme infinie pour le potentiel de premier ordre, qui s'écrit alors :

$$\Phi^{(1)}(x,z,t) = \sum_i \frac{A_i g}{\omega_i} e^{k_i z} \sin(k_i x - \omega_i t + \theta_i)$$

De l'analyse effectuée au paragraphe précédent il ressort que le potentiel de deuxième ordre en mode somme est identiquement nul. On obtient pour le mode différence :

$$\begin{aligned} \Phi_-^{(2)}(x,z,t) &= \sum_i \sum_j -\frac{A_i A_j \omega_i \omega_j (\omega_i - \omega_j)}{g(k_i - k_j) \operatorname{th}(k_i - k_j)h - (\omega_i - \omega_j)^2} \frac{\operatorname{ch}(k_i - k_j)(z+h)}{\operatorname{ch}(k_i - k_j)h} \\ &\times \sin\left[(k_i - k_j)x - (\omega_i - \omega_j)t + \theta_i - \theta_j\right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

(chaque couple (ω_i, ω_j) intervenant deux fois, on a divisé par deux le coefficient q_-).

La composante de deuxième ordre de l'élévation de surface libre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x,t) &= \sum_i \sum_j A_i A_j \frac{k_i + k_j}{4} \cos\left[(k_i + k_j)x - (\omega_i + \omega_j)t + \theta_i + \theta_j\right] \\ &+ \sum_i \sum_j A_i A_j \frac{(\omega_i - \omega_j)^2}{g} \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega_i \omega_j}{g(k_i - k_j) \operatorname{th}(k_i - k_j)h - (\omega_i - \omega_j)^2}\right) \\ &\times \cos\left[(k_i - k_j)x - (\omega_i - \omega_j)t + \theta_i - \theta_j\right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dans le cas (peu réaliste) où la profondeur est vraiment infinie, c'est à dire telle que :

$$|\operatorname{th}(k_i - k_j)h| = 1 \quad \forall k_i, k_j, \quad i \neq j$$

on peut encore simplifier cette expression en :

$$\begin{aligned} \eta^{(2)}(x,t) &= \sum_i \sum_j A_i A_j \frac{k_i + k_j}{4} \cos\left[(k_i + k_j)x - (\omega_i + \omega_j)t + \theta_i + \theta_j\right] \\ &- \sum_i \sum_j A_i A_j \frac{|k_i - k_j|}{4} \cos\left[(k_i - k_j)x - (\omega_i - \omega_j)t + \theta_i - \theta_j\right] \end{aligned} \quad (3.74)$$

Si l'on rapproche cette expression de celle obtenue pour le signal enveloppe au carré (2.52) :

$$E^2(t) = \sum_i \sum_j A_i A_j \cos\left[(k_i - k_j)x - (\omega_i - \omega_j)t + \theta_i - \theta_j\right]$$

on constate que la composante basse fréquence de $\eta^{(2)}$ a pour effet de créer un affaissement du niveau moyen sous les ventres de l'enveloppe, soit donc sous les plus grandes vagues. La vitesse horizontale associée à $\Phi_-^{(2)}$ est alors dirigée en sens inverse de celui de propagation des vagues, de manière à compenser l'excès de transport de masse associé aux groupes de fortes vagues. Par contre la composante haute fréquence de $\eta^{(2)}$ a pour effet de surélever les crêtes. Une illustration est fournie par la figure 3.12.

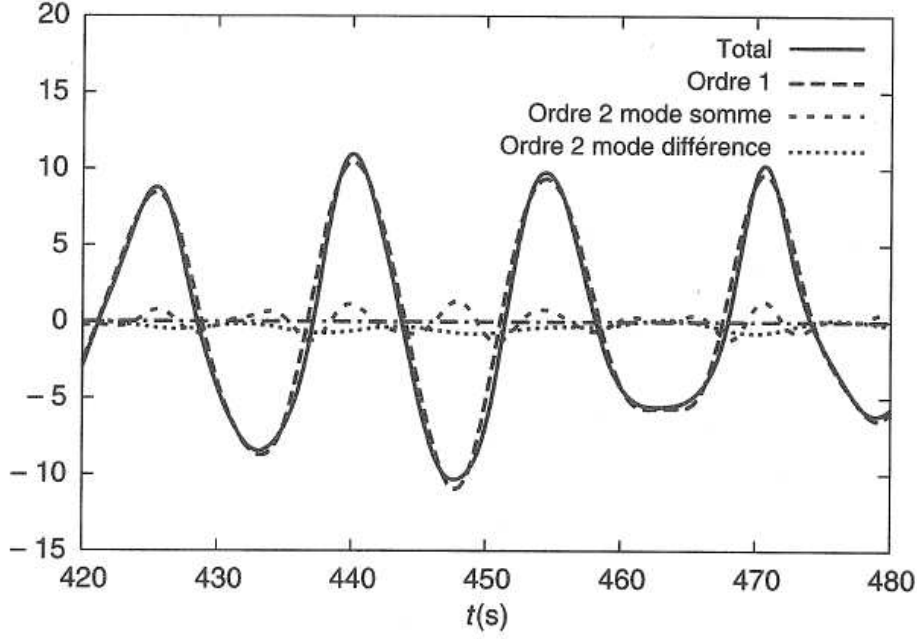


FIG. 3.12 – Composantes de premier et de deuxième ordres de l'élévation de surface libre sous un groupe de fortes vagues.

Spectres des quantités de deuxième ordre

On a, au paragraphe 2.1.4, donné l'expression du spectre du signal E^2 sans la justifier (relation (2.53)). On vient d'obtenir que les quantités de deuxième ordre, en houle irrégulière, sont de la forme :

Pour le mode différence :

$$F_-^{(2)}(t) = \sum_i \sum_j A_i A_j f_-^{(2)}(\omega_i, \omega_j) \cos \left[(\omega_i - \omega_j)t - \theta_i + \theta_j + \alpha_-^{(2)}(\omega_i, \omega_j) \right] \quad (3.75)$$

avec : $f_-^{(2)}(\omega_j, \omega_i) = f_-^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$ $\alpha_-^{(2)}(\omega_j, \omega_i) = -\alpha_-^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$
(par raison de symétrie en ω_i et ω_j).

Pour le mode somme :

$$F_+^{(2)}(t) = \sum_i \sum_j A_i A_j f_+^{(2)}(\omega_i, \omega_j) \cos \left[(\omega_i + \omega_j)t - \theta_i - \theta_j + \alpha_+^{(2)}(\omega_i, \omega_j) \right] \quad (3.76)$$

avec : $f_+^{(2)}(\omega_j, \omega_i) = f_+^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$ $\alpha_+^{(2)}(\omega_j, \omega_i) = \alpha_+^{(2)}(\omega_i, \omega_j)$

On constate que la valeur moyenne temporelle de $F_+^{(2)}$ est nulle, alors que celle de $F_-^{(2)}$ s'écrit :

$$\overline{F_-^{(2)}} = \sum_i A_i^2 f_-^{(2)}(\omega_i, \omega_i) = 2 \int_0^\infty S(\omega) f_-^{(2)}(\omega, \omega) d\omega \quad (3.77)$$

On établit facilement que les auto-corrélations de $F_-^{(2)}$ et $F_+^{(2)}$ s'écrivent :

$$R_-(\tau) = E \left\{ F_-^{(2)}(t) F_-^{(2)}(t + \tau) \right\} - \overline{F_-^{(2)}}^2 = \sum_i \sum_j A_i^2 A_j^2 f_-^{(2)2}(\omega_i, \omega_j) \cos(\omega_i - \omega_j) \tau$$

$$R_+(\tau) = \sum_i \sum_j A_i^2 A_j^2 f_+^{(2)2}(\omega_i, \omega_j) \cos(\omega_i - \omega_j) \tau$$

Avant de repasser au domaine continu il convient de tirer parti de la symétrie de $f_-^{(2)}$ et $f_+^{(2)}$:

$$R_-(\tau) = 2 \sum_i \sum_{j \geq i} A_i^2 A_j^2 f_-^{(2)2}(\omega_i, \omega_j) \cos(\omega_i - \omega_j) \tau$$

$$R_+(\tau) = 2 \sum_i \sum_{j \geq i} A_i^2 A_j^2 f_+^{(2)2}(\omega_i, \omega_j) \cos(\omega_i - \omega_j) \tau$$

D'où l'on tire, par exemple pour R_- :

$$R_-(\tau) = 8 \int_0^\infty S(\omega_i) d\omega_i \int_{\omega_i}^\infty S(\omega_j) d\omega_j f_-^{(2)2}(\omega_i, \omega_j) \cos(\omega_i - \omega_j) \tau$$

Soit, en posant $\omega_j - \omega_i = \Omega$:

$$R_-(\tau) = 8 \int_0^\infty S(\omega) \int_0^\infty S(\omega + \Omega) f_-^{(2)2}(\omega, \omega + \Omega) \cos \Omega \tau d\Omega d\omega$$

$$R_-(\tau) = 8 \int_0^\infty \cos \Omega \tau d\Omega \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \Omega) f_-^{(2)2}(\omega, \omega + \Omega) d\omega$$

On en déduit que le spectre de $F_-^{(2)}$ s'écrit :

$$S_{F_-^{(2)}}(\Omega) = 8 \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \Omega) f_-^{(2)2}(\omega, \omega + \Omega) d\omega \quad (3.78)$$

On établit de façon similaire que le spectre de $F_+^{(2)}$ s'écrit :

$$S_{F_+^{(2)}}(\Omega) = 8 \int_0^{\Omega/2} S(\omega) S(\Omega - \omega) f_+^{(2)2}(\omega, \Omega - \omega) d\omega \quad (3.79)$$

On en déduit, par exemple, que le spectre de la composante basse fréquence de $\eta^{(2)}$ est :

$$S_{\eta_-^{(2)}}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \Omega) \left(\frac{\omega^2 - (\omega + \Omega)^2}{g} \right)^2 d\omega \quad (3.80)$$

et celui de sa composante haute fréquence :

$$S_{\eta_+^{(2)}}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^{\Omega/2} S(\omega) S(\Omega - \omega) \left(\frac{\omega^2 + (\Omega - \omega)^2}{g} \right)^2 d\omega \quad (3.81)$$

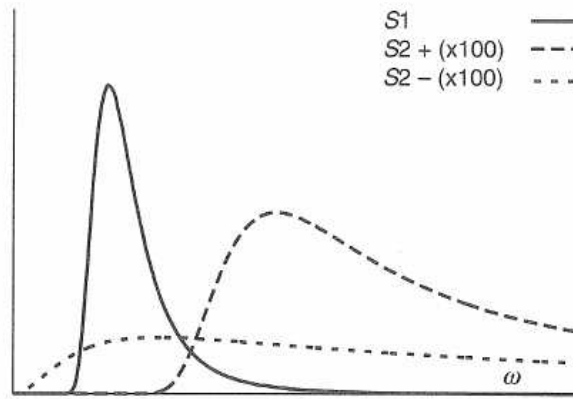


FIG. 3.13 – *Spectre de premier ordre de l'élévation de surface libre, et corrections de deuxième ordre en mode somme et en mode différence (magnifiés cent fois).*

ces deux expressions étant restreintes au cas d'une houle unidirectionnelle en profondeur infinie. Une illustration est fournie par la figure 3.13, où l'on constate que c'est surtout pour les hautes fréquences que les corrections de deuxième ordre sont appréciables.

$\eta^{(1)}$, $\eta_-^{(2)}$ et $\eta_+^{(2)}$ étant non corrélés, à l'ordre 2 d'approximation le spectre de l'élévation de surface libre est :

$$S_{\eta^{(1)}+\eta^{(2)}}(\omega) = S_{\eta^{(1)}}(\omega) + S_{\eta_-^{(2)}}(\omega) + S_{\eta_+^{(2)}}(\omega)$$

Il est paradoxal de constater que, dans le cadre d'une théorie de deuxième ordre, le spectre de l'élévation est différent du spectre de départ. Ce paradoxe peut évidemment être résolu en corrigeant le spectre initial (d'où sont déduites les amplitudes élémentaires A_i) de façon à retomber sur ses pieds.

3.4 Troisième ordre d'approximation

3.4.1 Houle régulière (Stokes ordre 3)

On ne considère ici que le cas de la profondeur infinie pour lequel on a vu que le potentiel de deuxième ordre est identiquement nul. On établit que la condition de surface libre que doit vérifier $\Phi^{(3)}$ s'écrit :

$$\Phi_{tt}^{(3)} + g \Phi_z^{(3)} = -A^3 \omega^3 k \sin(kx - \omega t) \quad z = 0 \quad (3.82)$$

Il apparaît qu'une solution de la forme :

$$\Phi^{(3)}(x, z, t) = C e^{kz} \cos(kx - \omega t)$$

ne peut convenir, à moins que C ne soit une fonction linéaire du temps, ce qui évidemment entre en contradiction avec l'hypothèse de régularité de la houle.

Ce genre de situation est bien connu dans l'étude des systèmes vibratoires non linéaires, et un moyen d'y remédier est de bâtir le schéma de perturbation sur une solution initiale du type :

$$\eta(x,t) = A(x,t) \cos(kx - \omega t - \alpha(x,t))$$

où amplitude A et déphasage α sont à variation lente avec x et t .

Appliquant cette procédure au problème considéré ici on constate qu'il suffit de faire varier le déphasage et que des expressions du type $\alpha = \omega^{(2)}t$ ou $\alpha = k^{(2)}x$ conviennent.

Si on garde inchangée la longueur d'onde, on est conduit à exprimer élévation de surface libre et potentiel sous la forme :

$$\begin{aligned} \eta(x,t) &= A \cos \left[kx - (\omega + \omega^{(2)})t \right] \\ \Phi(x,z,t) &= \frac{Ag}{\omega} e^{kz} \sin \left[kx - (\omega + \omega^{(2)})t \right] \end{aligned}$$

Par report dans l'équation de surface libre on obtient :

$$\omega^{(2)} = \frac{1}{2} A^2 k^2 \omega \quad (3.83)$$

Au troisième ordre inclus le potentiel d'une houle régulière en profondeur infinie (telle que $kh > 3$) s'exprime donc par :

$$\Phi(x,z,t) = \frac{Ag}{\omega} e^{kz} \sin \left[kx - \left(1 + \frac{A^2 k^2}{2} \right) \omega t \right] \quad (3.84)$$

où ω et k satisfont la relation de dispersion de la théorie linéaire :

$$\omega^2 = g k$$

Inversement si l'on désire garder constante la pulsation ω (situation correspondant par exemple à la houle régulière générée en bassin, la période du batteur étant déterminée), il convient d'écrire le potentiel sous la forme :

$$\Phi(x,z,t) = \frac{Ag}{\omega} e^{k'z} \sin(k'x - \omega t)$$

où : $k' = (1 - A^2 k^2) k$

Les non-linéarités du troisième ordre ont donc pour effet de diminuer le nombre d'onde, soit de rallonger la longueur d'onde.

L'élévation de surface libre s'écrit alors, à l'ordre 3 inclus :

$$\eta(x,t) = \left(1 - \frac{3}{8} A^2 k^2 \right) A \cos \theta + \frac{1}{2} A^2 k \cos 2\theta + \frac{3}{8} A^3 k^2 \cos 3\theta \quad (3.85)$$

où : $\theta = (k' x - \omega t)$

Par rapport à la solution initiale de premier ordre, le crête à creux est inchangé mais l'amplitude du fondamental est modifiée.

On présente sur la figure 3.14, à un instant t donné, les profils de surface libre obtenus suivant les modèles de Stokes aux ordres 1 (Airy), 2 et 3, toujours pour une cambrure $2A/L$ de 10 %, et pour une même pulsation. On y constate l'augmentation sensible de la longueur d'onde suivant le modèle d'ordre 3. Sur ce même cas la figure 3.15 présente l'erreur relative commise sur le respect de la condition dynamique de surface libre.

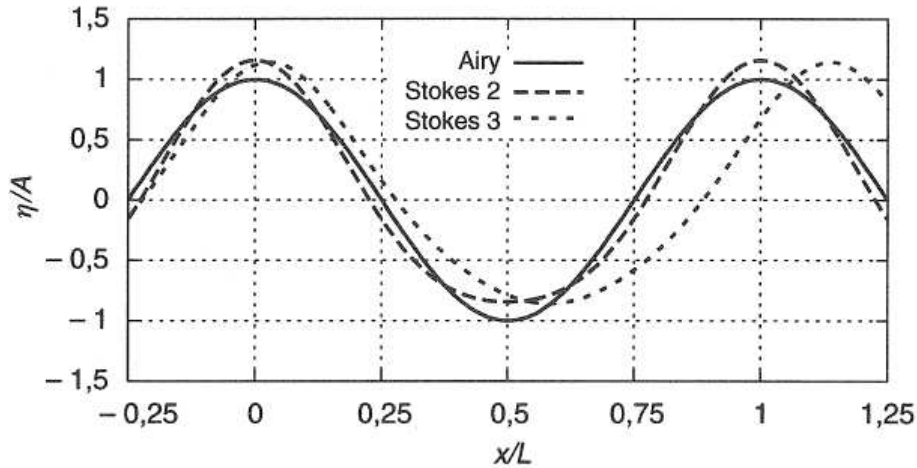


FIG. 3.14 – *Houle régulière en grande profondeur. Profils de surface libre suivant les modèles de Stokes d'ordre 1, 2 et 3.*

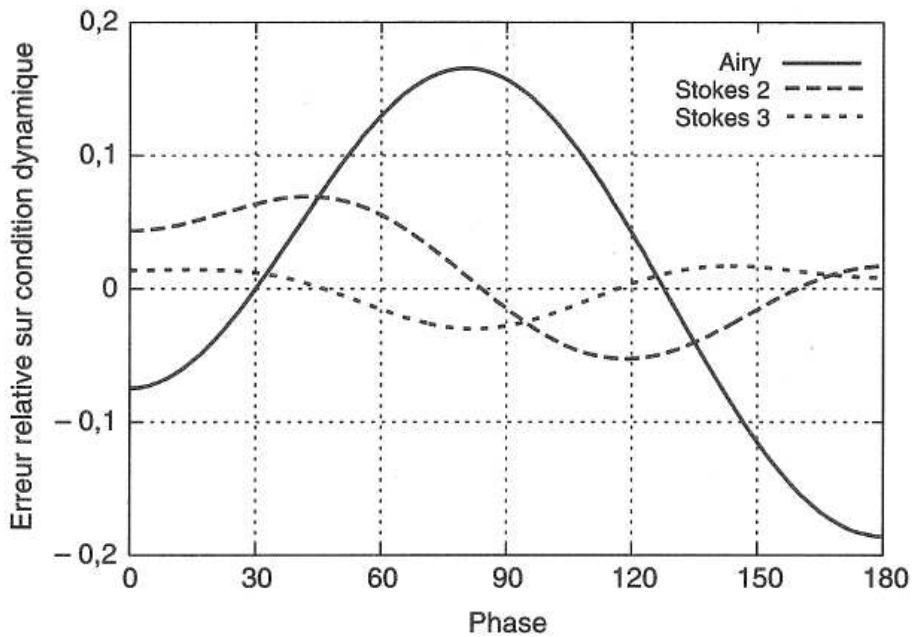


FIG. 3.15 – *Houle régulière en grande profondeur. Erreur relative commise sur le respect de la condition dynamique de surface libre, suivant les modèles de Stokes d'ordre 1, 2 et 3.*

3.4.2 Houle multichromatique

On vient de voir qu'à l'ordre 3 une houle régulière interagit avec elle-même, de telle façon que sa longueur d'onde est modifiée (à pulsation donnée).

Dans le cas d'une houle bichromatique, l'interaction croisée de chaque composante avec la seconde conduit aussi à une modification de sa longueur d'onde, modification qui se rajoute à celle induite par son auto-interaction. Dans le cas d'un clapotis, équivalent à deux

houles régulières de mêmes amplitude et pulsation, se propageant en sens opposé, l'interaction croisée conduit à une diminution de la longueur d'onde alors que l'auto-interaction tend à l'augmenter. Les deux corrections se compensent pour une valeur particulière de kh , égale à 1,06. On a récemment pris conscience que de telles interactions prennent également place entre la houle incidente et la houle réfléchi par une structure, au point d'entraîner une modification appréciable du champ de vagues incident et des phénomènes de focalisation, se traduisant par des fortes surélévations de surface libre, localement, le long de la structure («run-ups»).

Dans le cas d'une houle multichromatique, on retrouve ces modifications de longueurs d'onde et, dans certaines conditions, des échanges d'énergie entre les composantes de houle.

Considérant en effet un quadruplet d'ondes d'Airy de pulsations $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ et de vecteurs d'onde $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4$ (deux d'entre elles pouvant être identiques), on montre que des échanges d'énergie peuvent se produire si les deux conditions suivantes sont remplies simultanément :

$$\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4 \simeq 0 \quad (3.86)$$

$$\pm\vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 \pm \vec{k}_4 \simeq 0 \quad (3.87)$$

le signe \simeq signifiant que ces égalités doivent être satisfaites avec une erreur relative de l'ordre de la cambrure au carré.

En particulier deux ondes initiales peuvent donner naissance à une troisième ou à une troisième et une quatrième. C'est ainsi que si l'on génère en bassin une houle bichromatique dont les pulsations ω_1 et ω_2 sont suffisamment rapprochées, on voit très rapidement apparaître deux composantes aux pulsations $2\omega_1 - \omega_2$ et $2\omega_2 - \omega_1$.

On verra plus loin que ces interactions de troisième ordre conduisent à des évolutions de la houle fondamentalement différentes de celles que prédit la théorie linéaire, et qui remettent sérieusement en question l'hypothèse selon laquelle une houle irrégulière est composée d'ondes sinusoïdales élémentaires indépendantes.

3.5 La houle régulière à l'ordre N

L'obtention des termes d'ordre supérieur, suivant le schéma utilisé dans les paragraphes précédents, devient rapidement lourde et fastidieuse. Stokes (en 1880) a fourni les développements à l'ordre 5 en profondeur infinie et à l'ordre 3 en profondeur finie. De nombreux auteurs, dans les années 1950-1960, se sont attelés à l'ordre 5 en profondeur finie. Les solutions qu'ils ont obtenues présentent des différences, dues pour une part à des erreurs, et pour une autre part à des conventions différentes dans la définition de la vitesse moyenne de l'écoulement.

Depuis les années 1970 on sait poursuivre le développement de Stokes à des ordres très élevés, jusqu'à atteindre la cambrure limite (telle que la crête présente un point anguleux de 120 degrés).

Un modèle de houle régulière fréquemment utilisé en offshore pétrolier est celui dit de la fonction de courant, ou de Fourier. Dans ce modèle, introduit par Dean en 1965 et largement amélioré par la suite, on ne cherche pas à ordonner et exprimer les différents coefficients (intervenant dans les expressions de l'élévation et du potentiel) en fonction du petit paramètre ε , mais on les détermine numériquement.

La méthode de la fonction de courant (ou de Fourier)

On suppose donnés le crête à creux H , la profondeur h et la longueur d'onde L . Dans un repère en translation uniforme avec une crête, l'écoulement est stationnaire. Il est plus approprié alors de le décrire via la fonction de courant $\Psi(x, z)$ que via le potentiel des vitesses puisque Ψ vérifie les deux conditions aux limites :

$$\Psi = 0 \text{ sur le fond } z = -h.$$

$$\Psi = -Q \text{ à la surface libre } z = \eta(x). \text{ } Q \text{ est le débit fluide à travers une verticale.}$$

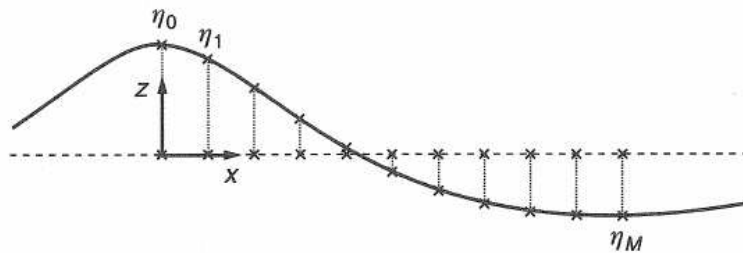


FIG. 3.16 – Géométrie.

La période T et la vitesse de phase $C_P = L/T$ dépendent du choix du repère «fixe». Faire le choix intuitif du repère fixe par rapport au fond marin n'a pas de sens ici puisque, dans le cadre d'une théorie de fluide parfait, l'écoulement y satisfait une condition de glissement.

Un repère particulier est celui tel que le débit moyen de l'écoulement soit nul. Dans ce repère la vitesse de phase est donc $C_{PL} = Q/h$ et la période $T_L = L/C_{PL}$.

Un autre repère particulier est tel que la vitesse moyennée sur une période, en tout point toujours immergé, soit nulle. Ce choix conduit à une vitesse de phase C_{PE} et à une période T_E différentes des précédentes, en raison du phénomène de transport de masse.

Dans le premier repère la vitesse moyenne **lagrangienne** est nulle. Dans le second c'est la vitesse moyenne **eulérienne**. La confusion de ces deux concepts est à l'origine de bien des erreurs.

Il est aussi possible de choisir comme repère fixe un repère tel que la houle coexiste avec un courant, de vitesse U_C . Il est évidemment indispensable de préciser si cette vitesse est définie dans un sens lagrangien ou eulérien.

L'élévation de surface libre $\eta(x)$ étant supposée périodique en x et symétrique par rapport à la crête, on recherche la fonction de courant sous la forme :

$$\frac{k \Psi(x, z)}{C_{PE}} = -k (z + h) + \sum_{j=1}^N a_j \frac{\text{sh } j k (z + h)}{\text{ch } j k h} \cos j k x \quad (3.88)$$

où $k = 2\pi/L$ et N est l'ordre de troncature de la série.

Les conditions de glissement sur le fond ($\Psi(x, -h) = 0$) et de continuité ($\Delta\Psi = 0$) sont automatiquement vérifiées. Seules restent à satisfaire les deux conditions de surface libre :

- cinématique : $\Psi(x, \eta(x)) = -Q$
- dynamique : $\frac{1}{2}(\Psi_x^2 + \Psi_z^2) + g\eta = R$

Q et R étant deux constantes non encore déterminées, de même que la vitesse de phase C_{PE} et les constantes a_j .

L'intervalle $[0, L/2]$ est alors discrétisé en $M + 1$ points d'abscisses $iL/(2M)$ (i allant de 0 à M) et d'élévations (inconnues) η_i . On a ainsi $M + N + 4$ inconnues ($M + 1$ valeurs η_i , N valeurs a_j , Q , R et C_{PE}) pour $2M + 4$ équations : les conditions cinématique et dynamique affichées aux $M + 1$ points de la surface libre et les deux conditions exprimant la nullité du niveau moyen et la hauteur du crête à creux :

$$\begin{aligned} \eta_0 + \eta_M + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \eta_i &= 0 \\ \eta_0 - \eta_M &= H \end{aligned}$$

On peut choisir $M > N$ pour aboutir à un système surdéterminé et minimiser un écart. On peut les prendre égaux, de manière à obtenir autant d'équations que d'inconnues, et appliquer la méthode de Newton pour les résoudre.

La période s'obtient une fois spécifiée la convention utilisée pour la définition du courant (eulérien et lagrangien), et donnée sa valeur U_C . Si U_C est la vitesse eulérienne, la période s'obtient par :

$$T = \frac{L}{C_{PE} + U_C} \quad (3.89)$$

S'il s'agit de la vitesse lagrangienne :

$$T = \frac{L}{C_{PL} + U_C} \quad (3.90)$$

où $C_{PL} = Q/h$.

Si, comme c'est le cas le plus fréquent, la période T et la vitesse du courant U_C sont données, l'une ou l'autre des relations ci-dessus est à rajouter aux $2M + 4$ équations et à inclure dans la résolution numérique.

L'ordre de troncature N de la représentation de la fonction de courant doit être évidemment pris d'autant plus élevé que la houle étudiée est cambrée, et que la profondeur est faible. Pour des cas extrêmes la convergence numérique peut être difficile, et nécessiter des valeurs initiales pas trop éloignées de la solution finale (ce qui peut obliger à incrémenter par paliers le crête à creux).

Un intérêt non négligeable de la méthode est qu'elle s'applique aussi bien en grande qu'en faible profondeur d'eau, quelle que soit la valeur du nombre d'Ursell. Elle permet de faire le

lien entre les deux théories, asymptotiques, de la houle de Stokes et de la houle cnoïdale.

On présente sur la figure 3.17 les profils de surface libre obtenus à l'aide du modèle de fonction de courant (tronqué à $N = 38$) pour des cambrures H/L allant jusqu'à 0,14 (la profondeur étant infinie). La valeur H/L de 0,14 est voisine de la «cambrure limite» théorique de 0,1412 où la crête présente un point anguleux avec un angle intérieur de 120 degrés. En pratique le déferlement survient pour des valeurs inférieures, de l'ordre de 0,1.

A noter qu'en profondeur finie la cambrure limite diminue. Elle est donnée approximativement par :

$$H/L_{\text{limite}} = 0,14 \operatorname{th} kh$$

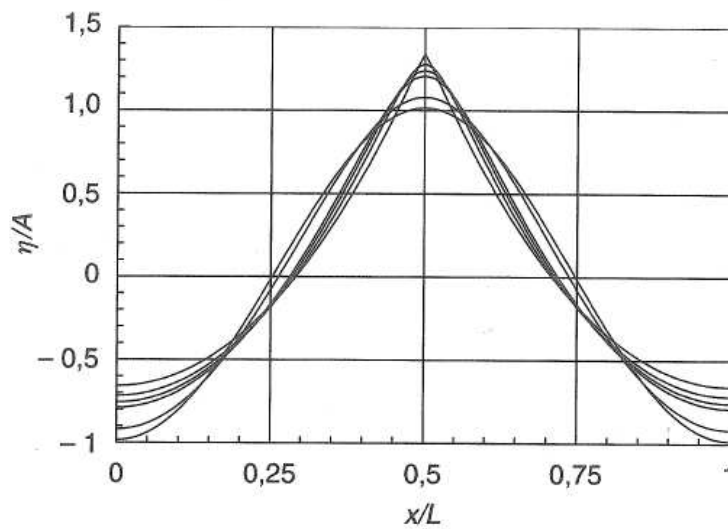


FIG. 3.17 – Profils de surface libre en profondeur infinie, pour $H/L = 0,01 ; 0,05 ; 0,1 ; 0,12 ; 0,13 ; 0,14$.

3.6 Evolution non linéaire de la houle

Dans ce dernier paragraphe on va brièvement décrire l'influence des non-linéarités sur l'évolution, en temps et en espace, de la houle. On se restreint ici au cas d'une houle à spectre étroit, centré autour d'une pulsation ω_0 et d'un nombre d'onde $k_0 = k(\omega_0)$.

On introduit l'enveloppe complexe $E(x,t)$ telle que l'élévation de surface libre puisse s'écrire :

$$\eta(x,t) = \Re \left\{ E(x,t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \right\} \quad (3.91)$$

Dans le cadre de la théorie linéaire on peut établir de la façon suivante l'équation d'évolution vérifiée par $E(x,t)$. L'élévation de surface libre satisfait la relation :

$$\eta(x,t) = \Re \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{i(k(\omega)x - \omega t)} d\omega \right\}$$

Concrètement cette relation signifie que, si l'on connaît $\eta(x,t)$ en $x = 0$ pour tout t , par transformée de Fourier de $\eta(0,t)$ on peut en identifier le contenu fréquentiel et donc en déduire l'élévation de surface libre pour tout x .

On en déduit que $E(x,t)$ vérifie :

$$E(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{i[(k(\omega)-k_0)x - (\omega-\omega_0)t]} d\omega \quad (3.92)$$

Par développement de Taylor de $k(\omega)$ au voisinage de ω_0 :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) k'(\omega_0) + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)^2 k''(\omega_0) + \dots$$

on obtient :

$$E(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\omega) e^{i[(\omega-\omega_0)(k'(\omega_0)x-t) + \frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2 k''(\omega_0)x + \dots]} d\omega$$

On en déduit qu'à un terme d'ordre $(\omega - \omega_0)^2$ près, $E(x,t)$ satisfait l'équation d'évolution :

$$k'(\omega_0) E_t + E_x = 0 \quad (3.93)$$

soit donc que l'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe.

A l'ordre suivant d'approximation (à un terme d'ordre $(\omega - \omega_0)^3$ près) $E(x,t)$ obéit à :

$$i [E_x + k'(\omega_0) E_t] - \frac{1}{2} k''(\omega_0) E_{tt} = 0 \quad (3.94)$$

où apparaît donc le terme dispersif E_{tt} . Physiquement ce terme implique qu'un paquet de vagues initial va se propager en s'étalant, les composantes les plus longues voyageant plus rapidement que les plus courtes.

«A un terme d'ordre $(\omega - \omega_0)^3$ près» signifie que cette équation décrit correctement l'évolution de la houle sur des distances de l'ordre L $(\omega_0/\Delta\omega)^2$, où L est la longueur d'onde $(2\pi/k_0)$ et $\Delta\omega$ la largeur en pulsation du spectre de houle.

A noter qu'en profondeur infinie cette restriction tombe puisque les dérivées d'ordre supérieur à deux de k par rapport à ω sont nulles.

On établit que l'effet des non-linéarités d'ordre trois est de rajouter à cette équation d'évolution un terme supplémentaire en $E E^* E$ où E^* est le conjugué de E . En profondeur infinie elle prend la forme :

$$i \left[E_x + \frac{2\omega_0}{g} E_t \right] - \frac{1}{g} E_{tt} - k_0^3 E E^* E = 0 \quad (3.95)$$

(en profondeur finie on obtient la même équation avec des coefficients un peu plus complexes).

On établit facilement que la solution de cette équation pour une houle régulière d'amplitude A s'écrit :

$$E(x,t) = A e^{-ik_0^3 A^2 x}$$

On retrouve donc le fondamental de la houle de Stokes d'ordre 3 en profondeur infinie :

$$\eta(x,t) = A \cos[(k_0 - k_0^3 A^2) x - \omega_0 t]$$

Stabilité de la houle régulière

L'intérêt de cette équation (dite de Schrödinger non linéaire) est qu'elle permet de mettre en évidence des évolutions de la houle fondamentalement différentes de celles prédites par la théorie linéaire. En particulier elle montre que la houle régulière est naturellement instable.

Pour cela on superpose au $E(x,t)$ de la houle régulière deux petites perturbations :

$$E = A e^{-ik_0^3 A^2 x} \left(1 + \alpha e^{i(Kx - \Omega t)} + \beta e^{-i(Kx - \Omega t)} \right)$$

En reportant cette expression dans l'équation de Schrödinger, et en ne conservant que les termes d'ordre α et β , on aboutit aux deux équations couplées :

$$\begin{pmatrix} -K + \frac{2\omega_0\Omega}{g} + \frac{\Omega^2}{g} - k_0^3 A^2 & -k_0^3 A^2 \\ -k_0^3 A^2 & K - \frac{2\omega_0\Omega}{g} + \frac{\Omega^2}{g} - k_0^3 A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On n'obtient une solution non triviale que si le déterminant est nul, soit :

$$\left(K - \frac{2\omega_0\Omega}{g} \right)^2 = \frac{\Omega^2}{g} \left(\frac{\Omega^2}{g} - 2k_0^3 A^2 \right) \quad (3.96)$$

ce qui fournit une relation entre Ω et K . On observe que pour :

$$\Omega^2 < 2\omega_0^2 k_0^2 A^2$$

le deuxième membre est négatif. La partie imaginaire de K est donc non nulle et l'onde parasite croît exponentiellement. Son taux de croissance est maximal pour :

$$\Omega = k_0 A \omega_0 \quad (3.97)$$

où la partie imaginaire de K vaut $k_0^3 A^2$.

On en déduit que si le signal houle est quelque peu bruité, des composantes parasites vont apparaître à des pulsations comprises entre $\omega_0 (1 - \sqrt{2} k_0 A)$ et $\omega_0 (1 + \sqrt{2} k_0 A)$, et seront d'amplitudes maximales à $\omega_0 (1 \pm k_0 A)$. C'est effectivement ce que l'on observe expérimentalement. Cette instabilité de la houle régulière est connue sous le nom d'instabilité de Benjamin-Feir.

Visuellement cela signifie que la sinusoïde de départ se module en groupes. L'intégration numérique de l'équation de Schrödinger prédit un phénomène de récurrence, à savoir une suite de modulations et démodulations, la sinusoïde de départ se retrouvant de loin en loin. Pratiquement on observe souvent que la houle déferle, en raison de l'augmentation de cambrure due à la modulation.

La figure 3.18 montre l'évolution, le long d'un canal, de la houle générée par un batteur (dont le signal de pilotage a été un peu perturbé). On constate qu'elle se module en battements, au fur et à mesure de sa progression. La figure 3.19 donne les spectres d'amplitude déduits des mesures d'élévation. On y voit apparaître des pics, de part et d'autre du fondamental et de ses harmoniques, aux pulsations $n \omega_0 (1 \pm k_0 A)$, comme le prédit l'équation de Schrödinger.

Un autre exemple est fourni par les figures 3.20 et 3.21, provenant de mesures effectuées dans feu le bassin 2 du Bassin d'Essais des Carènes à Paris. La figure 3.20 montre (en haut) l'enregistrement du mouvement du batteur, à une période de 1,5 s. On note une très légère variation d'amplitude à $t \simeq 140$ s et $t \simeq 245$ s. Les figures suivantes montrent les élévations

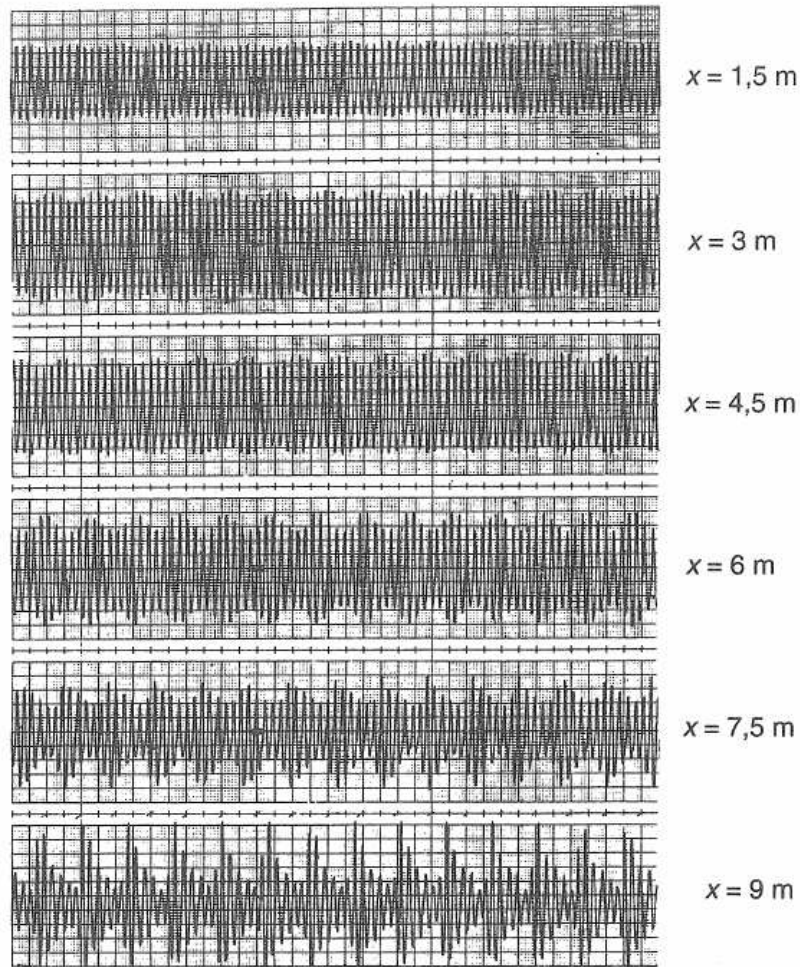


FIG. 3.18 – Evolution d'une houle régulière, perturbée initialement, le long d'un canal. Mesures de l'élévation de surface libre à distances croissantes du batteur.

de surface libre mesurées tous les 20 mètres le long du bassin. L'amplitude est voisine de 11 cm, soit une cambrure $2A/L$ de l'ordre de 6 %. Aux lyres les plus proches du batteur, L20 et L40 (à 20 et 40 m), rien de notable n'apparaît dans le signal mesuré. A la sonde L60 on note une perturbation du signal à $t \simeq 180$ s, qui se retrouve à $t \simeq 200$ s en L80, puis $t \simeq 220$ s en L100, de plus en plus amplifiée, jusqu'à donner un épisode de vagues complètement irrégulières, déferlantes, à 120 et 140 m du batteur. Plutôt que de disparaître ou de s'amenuiser en s'étalant, comme le voudrait la théorie linéaire, la perturbation s'est déplacée à la vitesse de groupe en s'amplifiant.

Sur les deux derniers enregistrements on note aussi une modulation du signal enveloppe, en groupe de 5 vagues environ, ainsi que le prédit la théorie pour la cambrure des essais.

Un autre phénomène intéressant prédit par l'équation de Schrödinger est celui de l'évolution d'un paquet de vagues, obtenu par exemple en actionnant un batteur à houle pendant une durée limitée (toujours avec un contenu fréquentiel étroit). La théorie linéaire prévoit que le train de vagues ainsi formé va s'étaler en raison du terme de dispersion. L'équation de

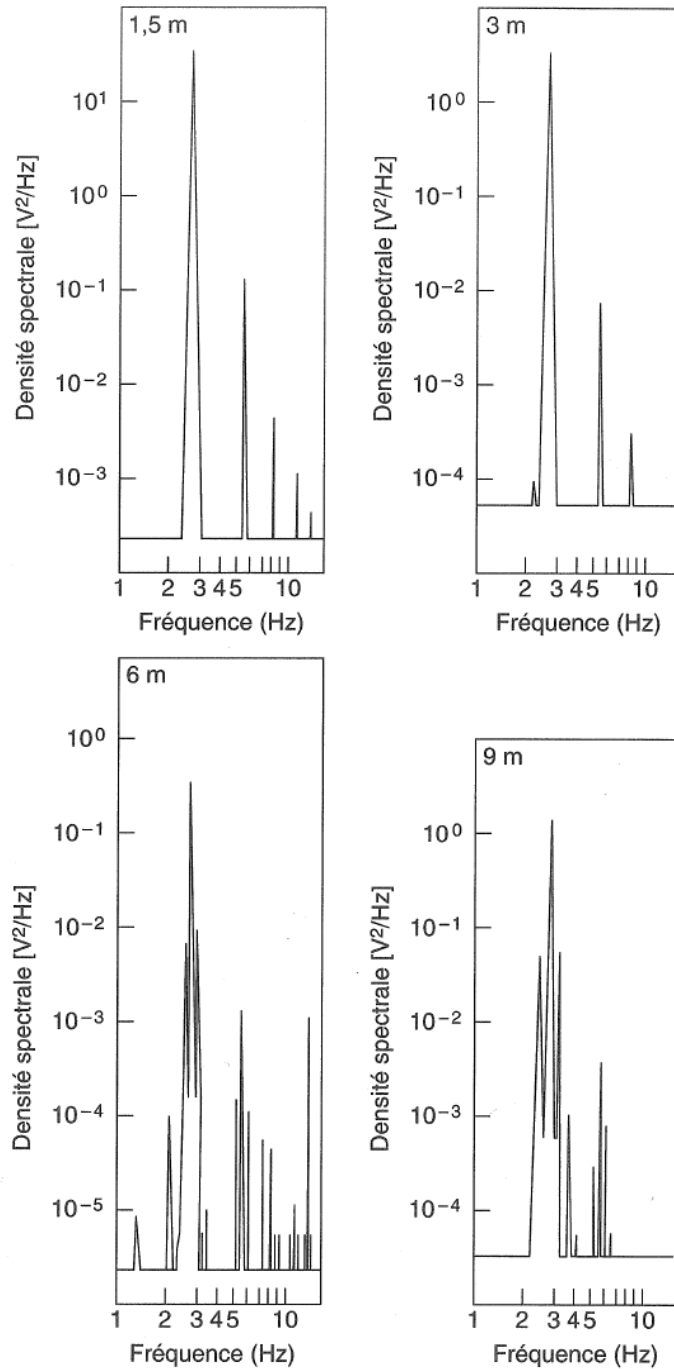


FIG. 3.19 – Evolution d'une houle régulière, perturbée initialement, le long d'un canal. Spectres d'amplitude de l'élévation de surface libre à distances croissantes du batteur.

Schrödinger prédit la scission du paquet initial en plusieurs groupes de vagues se propageant sans modification de forme (on parle de «solitons enveloppes»). Ce deuxième type d'évolution est effectivement obtenu par l'expérience (figure 3.22).

Il ne faut pas perdre de vue toutefois que l'équation non linéaire de Schrödinger ne fournit qu'une description approchée des phénomènes et qu'elle est basée sur des hypothèses assez

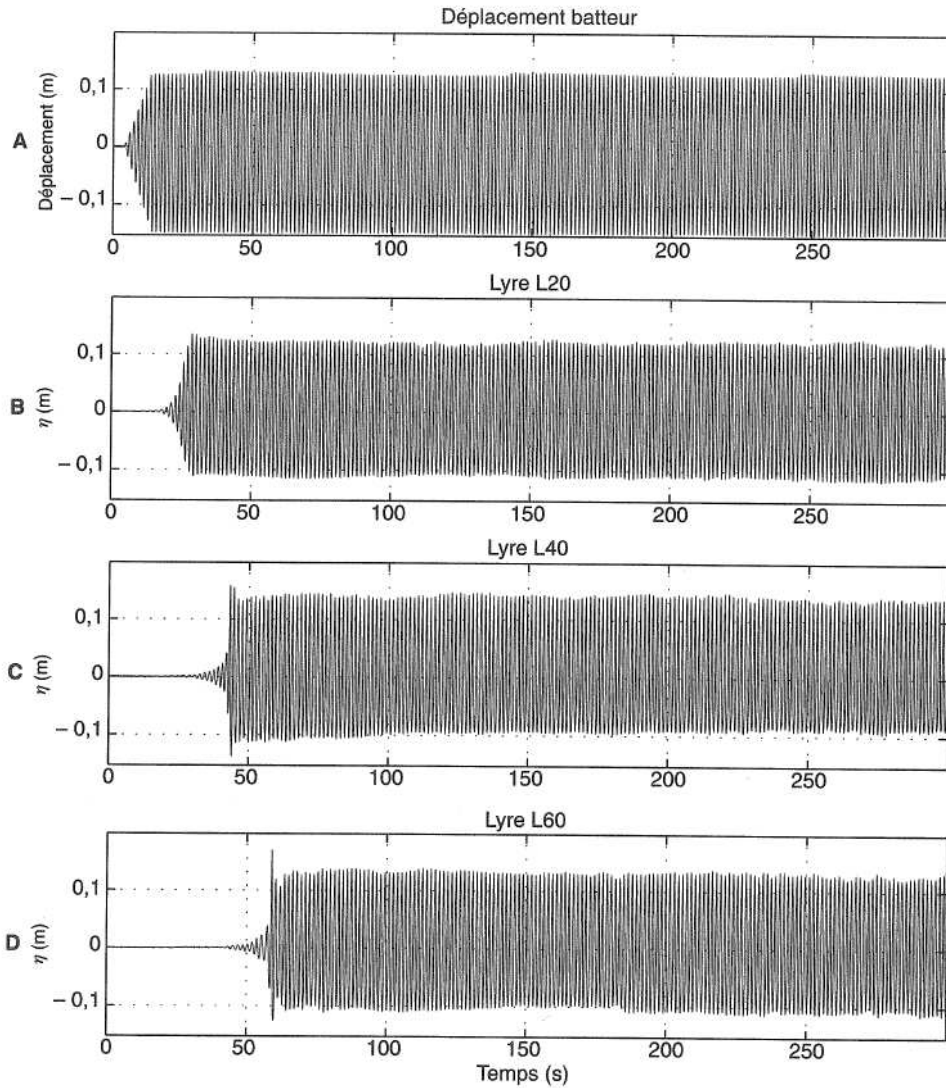


FIG. 3.20 – Propagation d’une houle régulière dans un bassin. Mouvement du batteur (haut) et élévations de surface libre mesurées à 20, 40 et 60 mètres.

restrictives (spectre étroit, distance d’évolution limitée, non-linéarités d’ordre 3 seules prises en compte). Par ailleurs, en profondeur d’eau finie, ces résultats sont quelque peu modifiés, l’instabilité de Benjamin-Feir disparaissant pour $kh < 1,36$.

Avec des techniques différentes, de nombreux auteurs ont étudié la stabilité de la houle régulière d’amplitude finie. On établit que, dès que la cambrure H/L dépasse environ 10 %, des instabilités beaucoup plus fortes que celle de Benjamin-Feir apparaissent. Liées à des non-linéarités d’ordre 4, ces instabilités présentent un fort caractère tri-dimensionnel. Elles entraînent rapidement le déferlement, ou la bifurcation vers de nouveaux états tri-dimensionnels, en forme de «fers à cheval» (ou de croissants) (figure 3.23).

On arrête ici ces considérations qui ont pour objectif principal de faire prendre conscience au lecteur que la houle régulière n’existe que dans l’esprit des concepteurs. Pour qui aura à

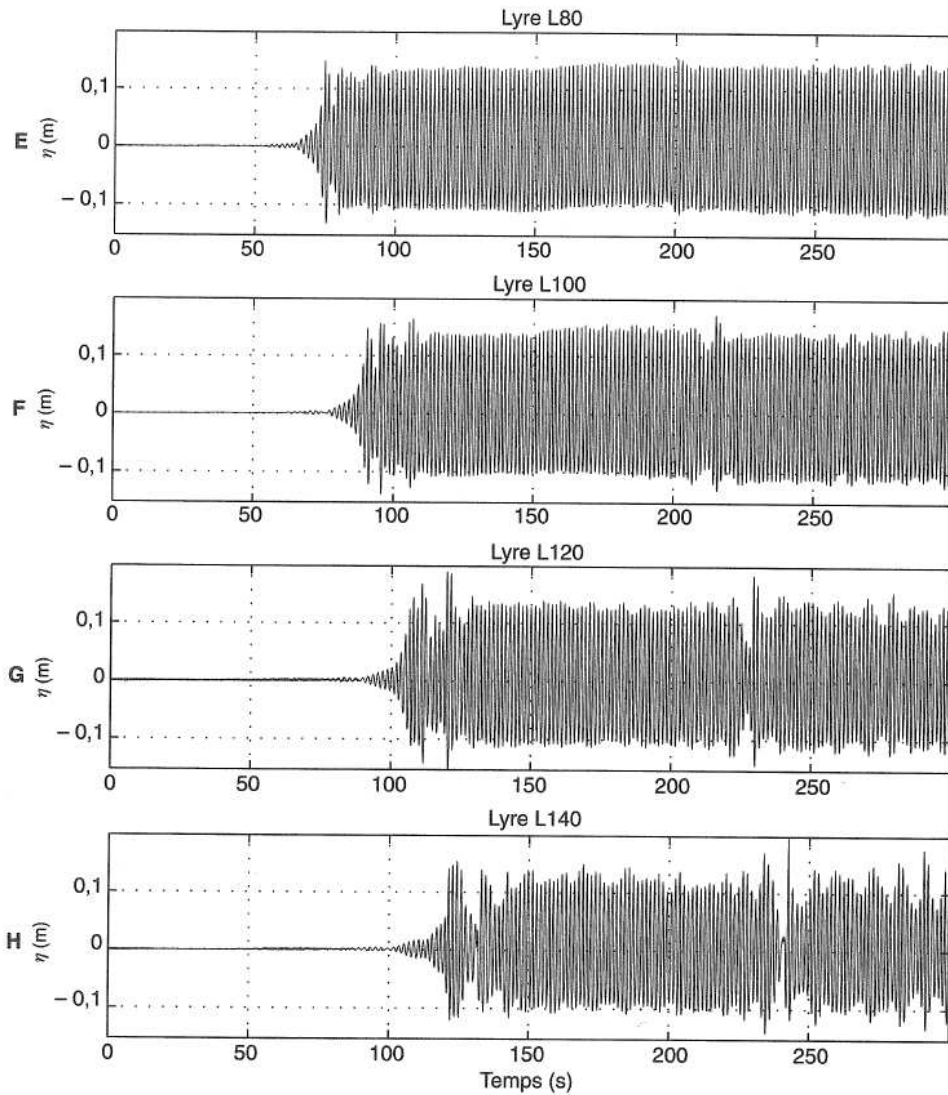


FIG. 3.21 – Propagation d'une houle régulière dans un bassin. Elévations de surface libre mesurées à 80, 100, 120 et 1400 mètres.

concevoir des essais en bassin il est par ailleurs important de savoir que la houle régulière générée par le batteur se dégrade inéluctablement à une certaine distance, d'autant plus courte que la longueur d'onde est faible, la cambrure élevée et le mouvement du batteur mal contrôlé.

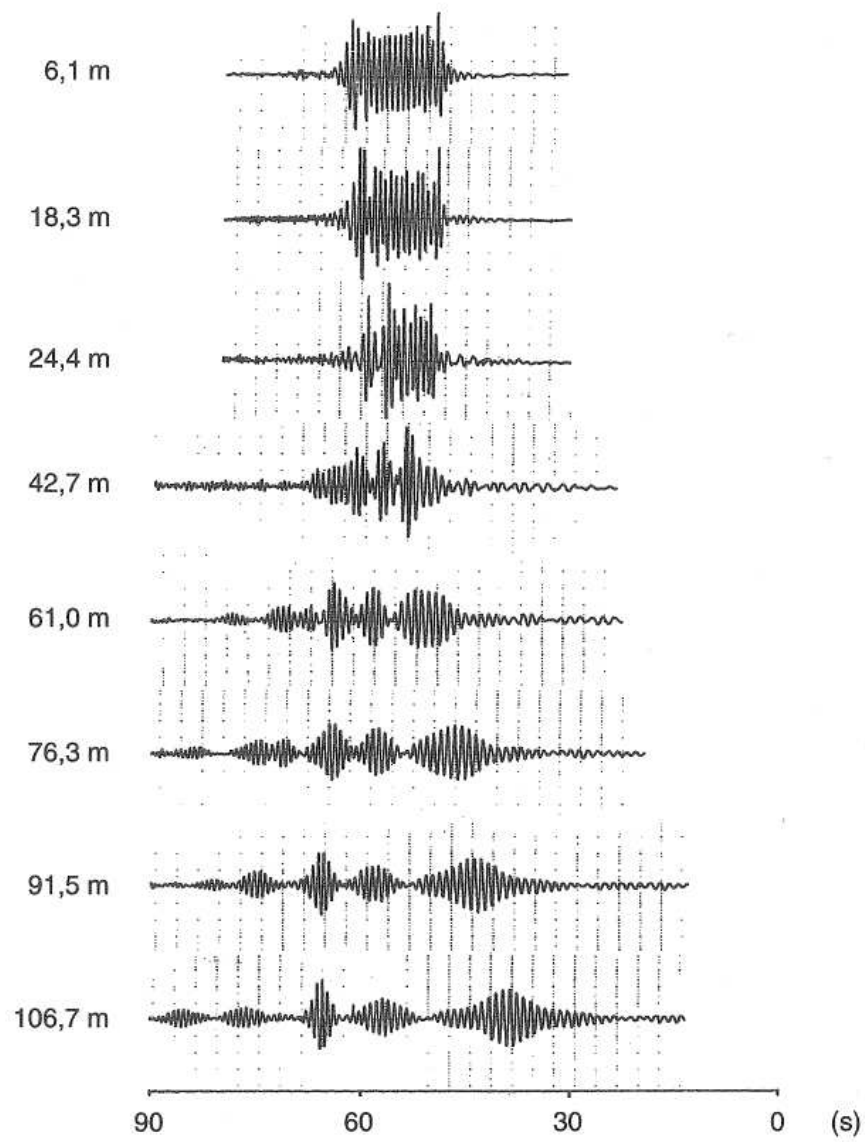


FIG. 3.22 – *Evolution d'un paquet de vagues initial.*

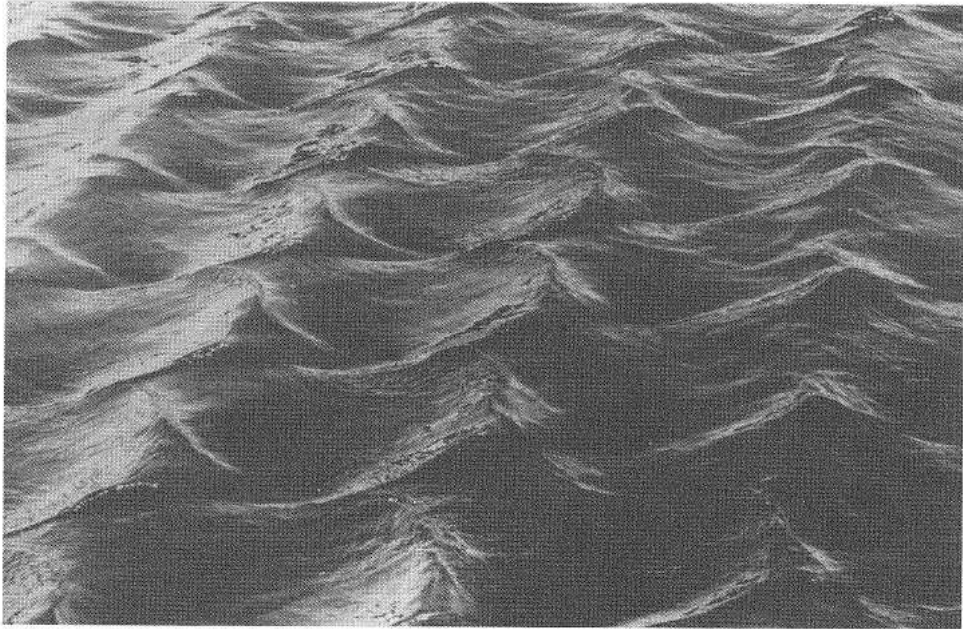


FIG. 3.23 – *Vagues en forme de fer à cheval.*

Chapitre 4

LES PETITS CORPS

Dans ce chapitre on s'intéresse aux structures dont les éléments constitutifs sont de dimensions petites devant la longueur d'onde de la houle incidente et, par voie de conséquence, de dimensions comparables ou inférieures à l'amplitude du mouvement des particules fluides. La structure de référence est le *jacket*, dont plusieurs centaines d'exemplaires ont été installées principalement dans le golfe du Mexique et en mer du Nord. Tombent également dans cette catégorie les liaisons fond-surface telles que : *risers*, lignes d'ancrage, tendons des plates-formes sur lignes tendues. Éléments tubulaires des jackets, risers et lignes d'ancrage ont pour caractéristique commune (en général, et à la rugosité de surface près) d'être de section circulaire, aussi le cylindre circulaire sert ici de cas de référence.

L'écoulement sur les petits corps (dès lors que l'amplitude relative du mouvement des particules fluides excède leur diamètre) a pour caractéristique d'être fortement séparé. En l'état actuel des connaissances, la modélisation numérique des écoulements séparés à grands nombres de Reynolds reste du domaine de la recherche universitaire et nécessite de lourds moyens numériques, même pour des géométries aussi simples (en apparence) que les cylindres circulaires. Pour dimensionner un jacket formé de plusieurs centaines de barres, on conçoit aisément le besoin qu'il y a de pouvoir exprimer simplement les efforts auxquels elles sont soumises, sans faire appel à une modélisation complexe.

Il est d'usage d'introduire les deux simplifications suivantes à ce problème :

- la première consiste à supposer l'écoulement incident, sur une barre donnée, non perturbé par les barres adjacentes. Sont ainsi ignorés les effets d'écran, ou de masquage ;
- la deuxième consiste à appliquer une «théorie des tranches», en ne considérant que la projection de l'écoulement dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. On suppose que la composante axiale de l'écoulement est sans effet sur les efforts transverses, et que les efforts longitudinaux qu'elle induit par le frottement sont négligeables.

Corrélativement on ignore les effets de surface libre, et on applique, autour de chaque tranche de cylindre, une hypothèse de domaine fluide illimité dans lequel l'écoulement incident est uniforme (le même en tout point).

Le problème de base à résoudre est donc celui de formuler les efforts hydrodynamiques s'exerçant sur une tranche de cylindre, en mouvement à la vitesse $\dot{X}(t), \dot{Y}(t)$, dans un écoulement de vitesse $U(t), V(t)$.

Dans un premier temps on aborde la résolution de ce problème dans le cadre de la théorie potentielle, afin de bien en faire ressortir les enseignements et les déficiences, par la comparai-

son qui suit avec les résultats expérimentaux. Ceux-ci sont d'abord présentés pour le cas de cylindres soumis à un courant de vitesse constante. On passe ensuite aux écoulements oscillants, où l'on introduit la formule de Morison, et aux combinaisons de courant et d'écoulement oscillant, où l'on montre ses limitations. Enfin on aborde le problème des vibrations induites par les écoulements.

4.1 Théorie potentielle

4.1.1 Cylindre fixe dans un écoulement

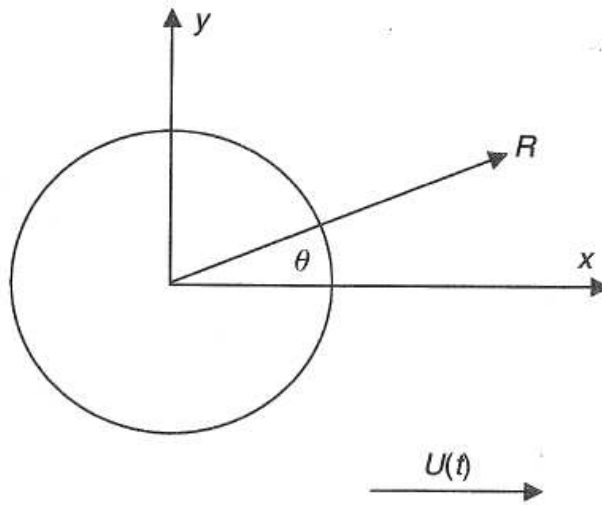


FIG. 4.1 – Géométrie.

Sans perte de généralité on peut supposer l'écoulement incident dirigé suivant l'axe Ox , et de vitesse $U(t)$. Le potentiel «incident» s'écrit alors :

$$\Phi_I = U(t) x = U(t) R \cos \theta \quad (4.1)$$

On établit facilement que le potentiel global (incident + perturbation) s'écrit :

$$\Phi(R, \theta, t) = U(t) R_0 \left(\frac{R}{R_0} + \frac{R_0}{R} \right) \cos \theta \quad (4.2)$$

R_0 étant le rayon du cylindre.

La pression est donnée par la relation de Bernoulli-Lagrange :

$$p = p_0(t) - \rho \Phi_t - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 \quad (4.3)$$

A la paroi elle s'exprime par :

$$p = p_0(t) - 2 \rho R_0 \dot{U}(t) \cos \theta - 2 \rho U^2(t) \sin^2 \theta \quad (4.4)$$

L'effort résultant sur le cylindre (par unité de longueur) est donné par :

$$F_x = 2 \rho \pi R_0^2 \dot{U}(t) \quad (4.5)$$

Pour un écoulement de vitesse constante les efforts sont nuls (d'Alembert) — on a ici supposé nulle la circulation autour du cylindre ; pour une circulation non nulle on obtient un effort de portance, perpendiculaire à la direction de l'écoulement incident.

4.1.2 Cylindre en mouvement dans un fluide au repos

Toujours sans perte de généralité, on suppose la vitesse $\dot{X}(t)$ du cylindre dirigée suivant l'axe Ox . Dans le système d'axes lié au cylindre (R, θ) , le potentiel de l'écoulement absolu s'écrit :

$$\Phi(R, \theta, t) = -\dot{X}(t) \frac{R_0^2}{R} \cos \theta \quad (4.6)$$

La pression appliquée à la paroi s'obtient alors par :

$$p = p_0(t) - \rho \Phi_t - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 + \rho \dot{X}(t) \Phi_x \quad (4.7)$$

(le dernier terme provenant de ce que Φ est exprimé en fonction de coordonnées (R, θ) dans un repère mobile.)

On vérifie à nouveau que les deux derniers termes fournissent une contribution identiquement nulle à l'effort de réaction hydrodynamique, qui s'écrit :

$$F_x = -\rho \pi R_0^2 \ddot{X}(t) \quad (4.8)$$

4.1.3 Généralisation

Dans le cas général d'un cylindre de forme quelconque, mais tel que l'un des deux axes Ox ou Oy soit axe de symétrie, on obtient que les efforts hydrodynamiques, dans le cadre de la théorie potentielle, s'expriment par (toujours pour une longueur unitaire) :

$$F_x = (1 + C_{mxx}) \rho S \dot{U}(t) - C_{mxx} \rho S \ddot{X}(t) \quad (4.9)$$

$$F_y = (1 + C_{myy}) \rho S \dot{V}(t) - C_{myy} \rho S \ddot{Y}(t) \quad (4.10)$$

où S est la section du cylindre.

Dans ces expressions C_{mxx} et C_{myy} sont les coefficients de masse ajoutée pour la « radiation » (donc égaux à 1 pour une section circulaire). Certains auteurs écrivent : $C_M = 1 + C_m$ et appellent également — improprement — C_M coefficient de masse ajoutée (ou d'inertie), d'où un risque permanent de confusion.

La figure 4.2 présente le coefficient de masse ajoutée C_{mxx} d'une forme rectangulaire, de hauteur $2a$ (suivant y) et de longueur $2b$. (A noter que sur cette figure la surface de référence est πa^2 et non celle du rectangle).

Dans le cas (rare) où ni Ox ni Oy n'est axe de symétrie, il apparaît des termes croisés en $C_{mxy} \dot{U}, C_{mxy} \dot{V}, C_{mxy} \ddot{X}$ et $C_{mxy} \ddot{Y}$: un écoulement accéléré suivant l'axe Ox entraîne des efforts suivant Oy , etc.

On a aussi ici supposé nulle la vitesse en rotation du cylindre, sinon d'autres termes apparaissent encore (voir à ce sujet, par exemple, la théorie de la manœuvrabilité des navires).

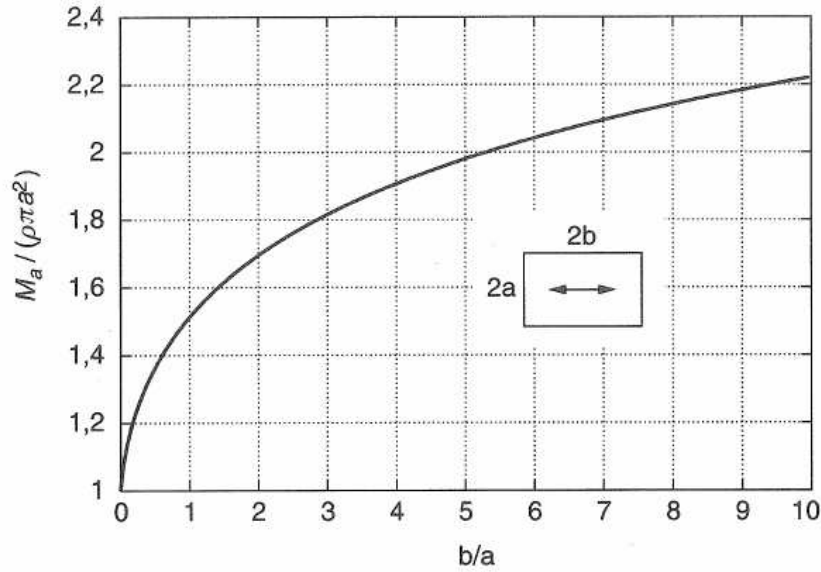


FIG. 4.2 – Coefficient de masse ajoutée d’une forme rectangulaire de hauteur $2a$ et longueur $2b$, en fonction du rapport b/a

A noter enfin que le paradoxe de d’Alembert ne s’applique qu’aux efforts en translation. La théorie potentielle prédit un moment qui s’écrit :

$$C_z = \rho (C_{mxx} - C_{myy}) S (U - \dot{X}) (V - \dot{Y}) \quad (4.11)$$

Ce moment, qui tend à orienter les formes allongées en travers du courant, est connu sous le nom de moment de Munk.

Il convient de noter que ces résultats sont valables sans restriction sur l’amplitude du mouvement du cylindre et que, à l’encontre de ce qui se passe en présence d’une surface libre, ou en fluide visqueux, il n’y a pas d’effet de mémoire de l’écoulement : les efforts à l’instant t ne dépendent que de la cinématique du cylindre et du fluide au même instant. Cela signifie aussi, en l’absence d’écoulement incident, que si l’on arrête brusquement le cylindre dans son mouvement, l’écoulement fluide stoppe instantanément, résultat contraire à l’expérience que l’on a des fluides visqueux.

4.2 Cylindre dans un courant

On considère le cas d’un cylindre lisse de section circulaire, placé dans un courant de vitesse constante U dirigée suivant l’axe Ox . On a vu que la théorie potentielle prédit un effort global nul et une pression à la paroi égale à :

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - 2 \rho U^2 \sin^2 \theta$$

On définit habituellement le coefficient de pression :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (4.12)$$

La figure 4.3 montre le coefficient de pression obtenu expérimentalement (en fait sa valeur moyenne en temps), comparé à la valeur prédite par la théorie potentielle. On constate que l'accord n'est correct qu'aux faibles valeurs de l'angle θ (compté sur la figure positivement depuis le point de stagnation amont). En aval du cylindre la valeur expérimentale ne parvient pas à remonter à la valeur théorique, et reste à peu près constante dès que l'angle θ dépasse une certaine valeur, comprise entre 80 et 120 degrés et dépendant du **nombre de Reynolds**, défini comme :

$$\text{Re} = \frac{U D}{\nu} \quad (4.13)$$

où D est le diamètre et ν la viscosité cinématique ($\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour l'eau ; $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour l'air).

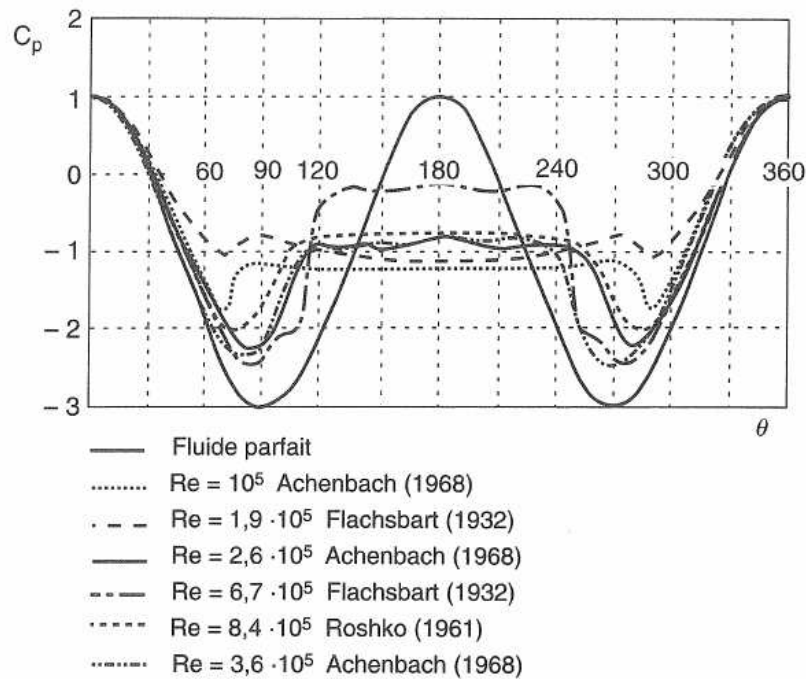


FIG. 4.3 – Coefficient de pression C_p mesuré sur un cylindre circulaire, pour différents nombres de Reynolds.

Ce défaut de pression en aval est une indication que l'écoulement s'est séparé, ce qui se traduit par un effort de traînée sur le cylindre, que l'on exprime classiquement par :

$$F_D = \frac{1}{2} \rho C_D D U^2 \quad (4.14)$$

Le coefficient de traînée C_D dépend du nombre de Reynolds Re , de la rugosité du cylindre, et du taux de turbulence présent dans l'écoulement incident. Les figures 4.4 et 4.5 présentent l'allure du coefficient de traînée, en fonction du nombre de Reynolds, pour un cylindre lisse. La première figure présente une compilation de résultats disponibles dans la littérature. La seconde résulte d'essais minutieux en soufflerie, à grands nombres de Reynolds.

On observe que, pour des nombres de Reynolds compris entre 10^4 et $2 \cdot 10^5$, le coefficient de traînée C_D est à peu près constant et voisin de 1,2. Dans cette gamme de Re la couche

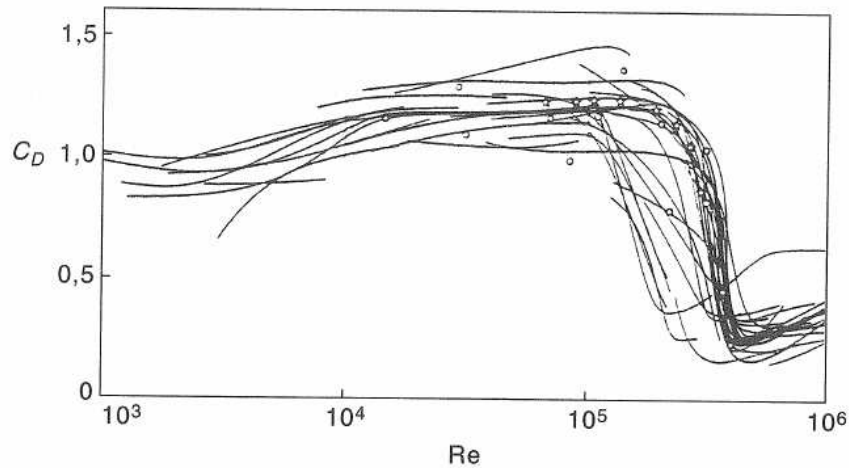


FIG. 4.4 – Coefficient de traînée C_D pour un cylindre circulaire (compilation de résultats de la littérature).

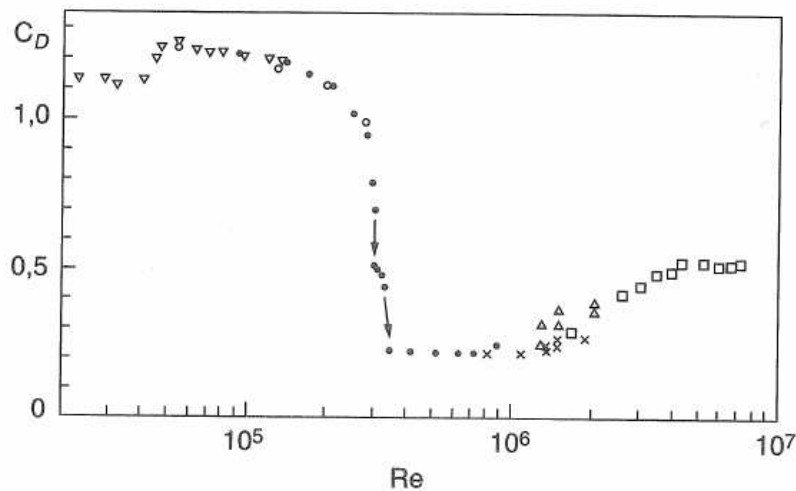


FIG. 4.5 – Coefficient de traînée C_D pour un cylindre circulaire, à grands nombres de Reynolds.

limite est laminaire jusqu'au point de séparation et la transition à la turbulence apparaît dans le sillage. A l'autre extrême, pour des nombres de Reynolds supérieurs à $3 \cdot 10^6$, la couche limite devient turbulente bien avant le point de séparation, qui de ce fait recule quelque peu ($\theta_s \simeq 120$ degrés comptés depuis le point de stagnation amont) par rapport à sa valeur en régime laminaire ($\theta_s \simeq 82$ degrés)¹. Le sillage ainsi formé étant plus étroit, le coefficient de traînée s'en trouve diminué et vaut environ 0,6. Entre ces deux domaines, dits **subcritique** et **transcritique** (ou post supercritique), on identifie le régime d'écoulement **critique** ($2 \cdot 10^5 < Re < 5 \cdot 10^5$) où le coefficient de traînée chute rapidement de 1,2 jusqu'à des valeurs de l'ordre 0,3 à 0,4, et le régime **supercritique** ($5 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$) où il

1. Une couche limite turbulente étant plus stable qu'une couche limite laminaire.

remonte à 0,6-0,7. Le minimum de traînée est associé à une première séparation laminaire, suivie d'un réattachement de l'écoulement et d'une deuxième séparation turbulente.

Il est évident que les limites entre ces différents régimes sont assez théoriques et qu'elles sont susceptibles de varier en fonction du taux de turbulence de l'écoulement incident, de la rigidité du montage expérimental, d'imperfections de surface, etc. La figure 4.6 illustre les différents régimes d'écoulement.

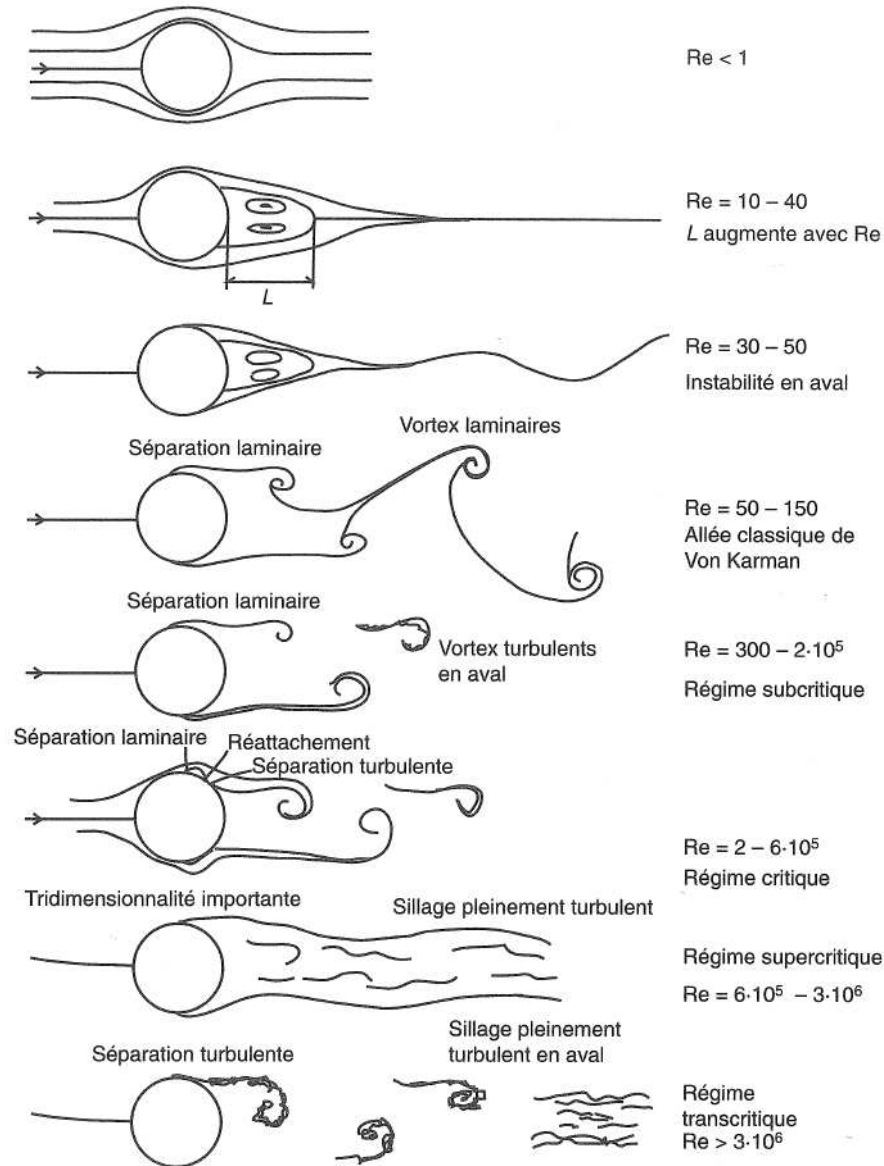


FIG. 4.6 – *Cylindre circulaire dans un courant. Régimes d'écoulements en fonction du nombre de Reynolds.*

Si l'on prend comme valeur de référence de la vitesse 1 m/s, et comme valeur de la viscosité $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, on constate que le nombre de Reynolds varie de $5 \cdot 10^4$ pour un câble d'ancrage de 5 cm de diamètre à $2 \cdot 10^7$ pour une colonne de plate-forme semi-submersible de 20 m de diamètre. Pour des barres de jacket de quelques dizaines de centimètres de diamètre on tombe en plein dans le domaine de variation rapide du coefficient de traînée.

4.2.1 Effet de l'inclinaison

Dans le cas où le cylindre est incliné par rapport à l'écoulement, on peut décomposer la vitesse incidente en une composante normale U_n et une composante tangentielle U_t et, de même, l'effort induit par l'écoulement en une composante normale F_n et une composante tangentielle F_t . On vérifie alors expérimentalement qu'effort normal et vitesse normale sont reliés par la même relation :

$$F_n = \frac{1}{2} \rho C_D D U_n^2 \quad (4.15)$$

avec (à très peu près) le même coefficient de traînée qu'en écoulement normal.

La composante tangentielle de l'effort est habituellement exprimée sous la forme :

$$F_t = \frac{1}{2} \rho C_f D U_t^2 \quad (4.16)$$

où le coefficient de friction C_f vaut, typiquement, 0,1.

Dans la plupart des applications la composante tangentielle de l'effort est négligeable. Il existe cependant des situations, comme pour les câbles de remorquage, où il est nécessaire d'en tenir compte.

4.2.2 Cylindre rugueux

On a souvent affaire à des cylindres «rugueux» en offshore, soit qu'ils le soient naturellement (câbles d'ancrage), soit qu'ils le deviennent du fait de l'accrétion de coquillages, de la pousse d'algues, etc. On définit la rugosité par le rapport k/D où k est la dimension moyenne des aspérités. Ainsi que le montre la figure 4.7 la rugosité a pour effet de diminuer la valeur du Reynolds critique. D'après Achenbach & Heinecke celui-ci est donné approximativement par :

$$\text{Re}_C = 6000 \left(\frac{k}{d} \right)^{-1/2}$$

Corrélativement la chute du C_D est moins marquée et, pour des cylindres très rugueux, le coefficient de traînée est à peu près constant.

On peut trouver paradoxal de constater que, à des nombres de Reynolds de l'ordre de $5 \cdot 10^4 - 10^5$, un cylindre rugueux présente moins de résistance à l'écoulement qu'un cylindre lisse. Cette propriété est utilisée pour certaines opérations de remorquage, par des câbles rugueux, et, dans un tout autre domaine, par les balles de golf.

4.2.3 Cylindres de section non circulaire

La figure 4.8 donne le coefficient de traînée sur une forme carrée, en fonction du nombre de Reynolds, et pour trois arrondis des coins du carré ($r/D = 0,021 ; 0,167 ; 0,333$). A l'arrondi le plus faible, pratiquement équivalent à un angle vif, le coefficient de traînée reste égal à 2, quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds (ici basé sur le côté du carré).

A l'inverse, pour le plus grand arrondi on retrouve des résultats très similaires à celui du cercle, avec une chute du C_D de 1 à 0,4 pour un nombre de Reynolds de l'ordre de $3 \cdot 10^5$. L'arrondi intermédiaire montre l'apparition du régime critique à des valeurs bien plus grandes du nombre de Reynolds, de l'ordre de $7 \cdot 10^5$.

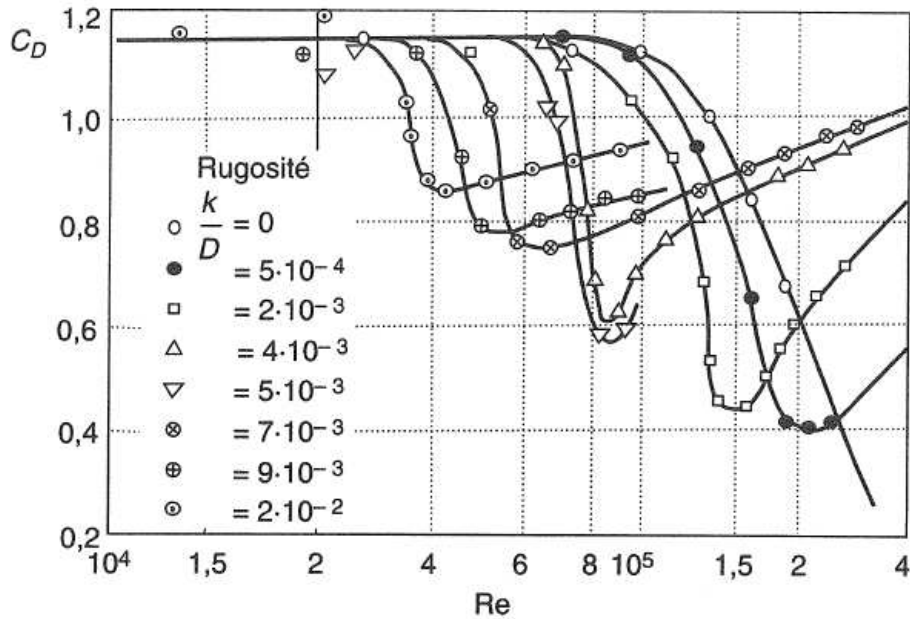


FIG. 4.7 – Effet de la rugosité sur le coefficient de traînée.

Un résultat important, illustré ici dans le cas du carré, est que le coefficient de traînée devient à peu près indépendant du nombre de Reynolds, dès lors que la structure considérée présente des angles vifs, imposant les points de séparation de l'écoulement.

La figure 4.9 présente le coefficient de traînée d'un rectangle à angles vifs, en écoulement frontal, en fonction de l'allongement défini comme le ratio b/a largeur sur hauteur. On observe qu'entre le cas de la plaque ($b/a = 0$) et celui du carré ($b/a = 1$), le coefficient de traînée prend des valeurs supérieures à 2, montant jusqu'à 3 pour $b/a \simeq 0,6$.

On trouve dans les règlements des abaques ou des formules empiriques permettant d'exprimer les efforts sur des géométries rectangulaires, pour des directions quelconques de l'écoulement incident (par rapport aux axes de symétrie du rectangle). Des corrections sont aussi proposées dans le cas de coins arrondis, fonction du rayon de courbure. Abaques et formules empiriques sont basées sur les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature, dont beaucoup sont rassemblés dans quelques ouvrages de référence comme *Fluid-Dynamic Drag* de Hoerner (1965), ou *Flow Induced Vibrations* de Blevins (1977).

4.2.4 Effets tridimensionnels

Les efforts de traînée sont directement reliés aux survitesses de l'écoulement extérieur au voisinage des points de décollement de la couche limite. Ces survitesses sont plus importantes pour des écoulements plans que pour leurs équivalents tridimensionnels. Par exemple, dans le cas du cylindre circulaire, la vitesse de l'écoulement de fluide parfait à ± 90 degrés du point de stagnation amont est 2 fois la vitesse incidente. Pour une sphère elle est de 1,5 fois la vitesse incidente. Il s'ensuit qu'en régime subcritique le coefficient de traînée de la sphère est voisin de 0,5, contre 1,2 pour le cylindre. En régime transcritique il chute à 0,2 (contre 0,6 ou 0,7).

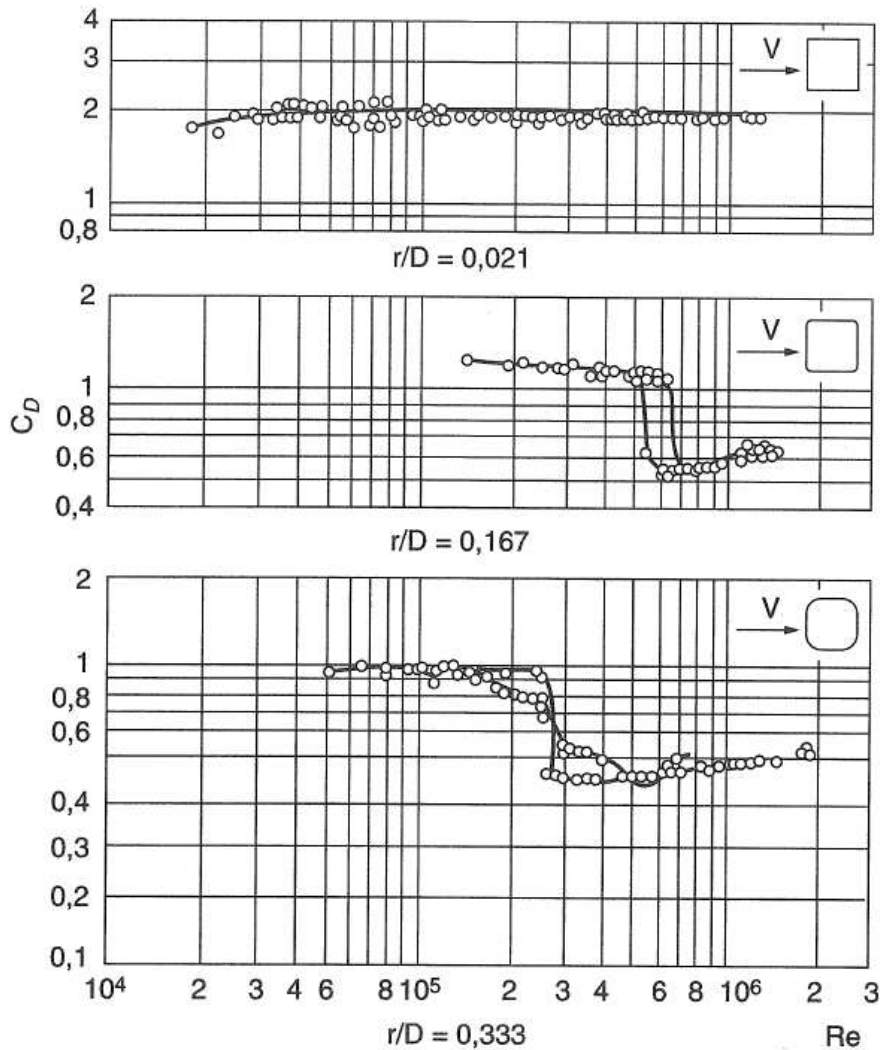


FIG. 4.8 – Coefficient de traînée sur une forme carrée à angles vifs ou arrondis.

De même le coefficient de traînée d'un cube vaut à peu près 1, contre 2 pour le cylindre de section carrée.

Pour des cylindres de longueur finie, les règlements proposent des formules de correction des efforts, fonction par exemple du rapport entre le diamètre de la section et la longueur du cylindre, et du régime d'écoulement.

4.2.5 La portance

On considère à nouveau le cas d'un cylindre de section circulaire immobile dans un courant. Malgré la symétrie de la géométrie il apparaît des efforts alternés dans la direction perpendiculaire à l'écoulement : la portance. Cette portance est due à ce que les points de décollement de l'écoulement sur le cylindre ne sont pas fixes, mais oscillent quelque peu, au rythme de la formation du sillage tourbillonnaire. Il s'ensuit une variation temporelle de la circulation autour du cylindre et, par effet Magnus, une portance fluctuante. En dehors de

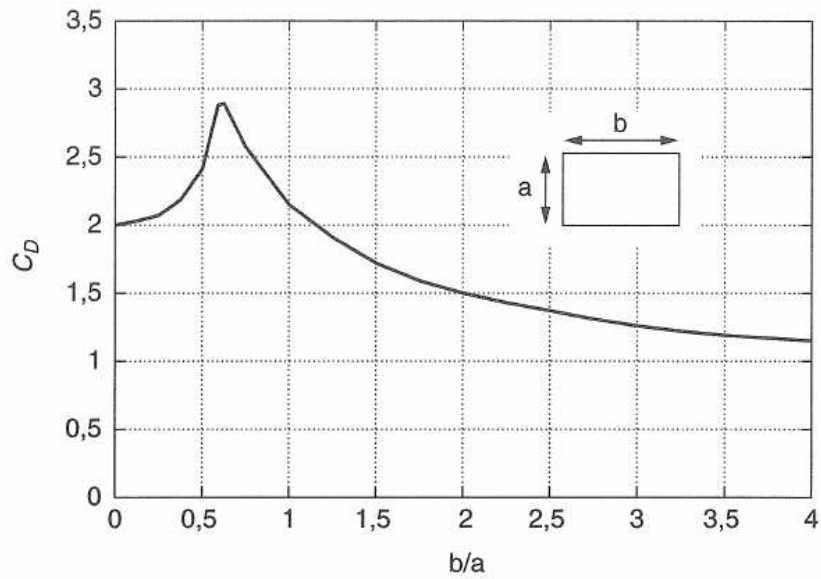


FIG. 4.9 – Coefficient de traînée sur une forme rectangulaire à angles vifs.

la zone de Reynolds critique la force de portance est à peu près sinusoïdale, et apparaît à la fréquence f_0 telle que $S_t = f_0 D/U \simeq 0,2$ (pour $10^2 < Re < 2 \cdot 10^5$; en régime transcritique S_t augmente quelque peu — voir fig. 4.10). S_t est appelé nombre de Strouhal. La figure 4.11 montre un enregistrement de la force de portance à un Reynolds légèrement inférieur à 10^5 .

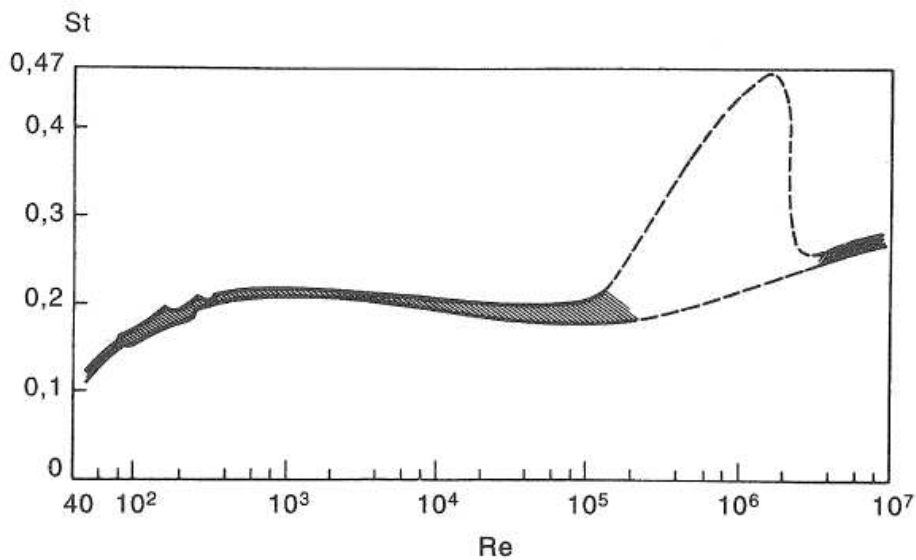


FIG. 4.10 – Nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds.

Les valeurs du coefficient de portance (défini comme l'amplitude, ou l'écart type, de l'effort de portance divisé par $1/2 \rho D L U^2$) abondent dans la littérature mais présentent une forte dispersion. Une raison tient à ce que les lâchers tourbillonnaires, le long du cylindre, ne sont pas synchronisés. La **longueur de corrélation**, distance sur laquelle les lâchers

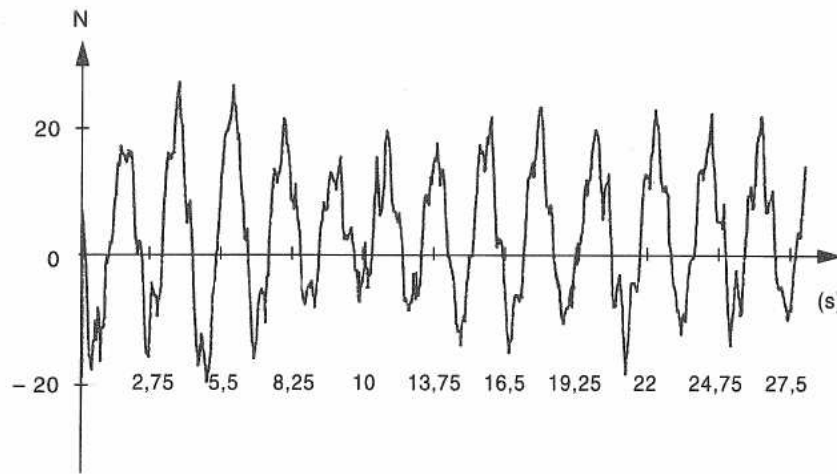


FIG. 4.11 – Effort de portance mesuré sur un cylindre à $Re = 8,8 \cdot 10^4$.

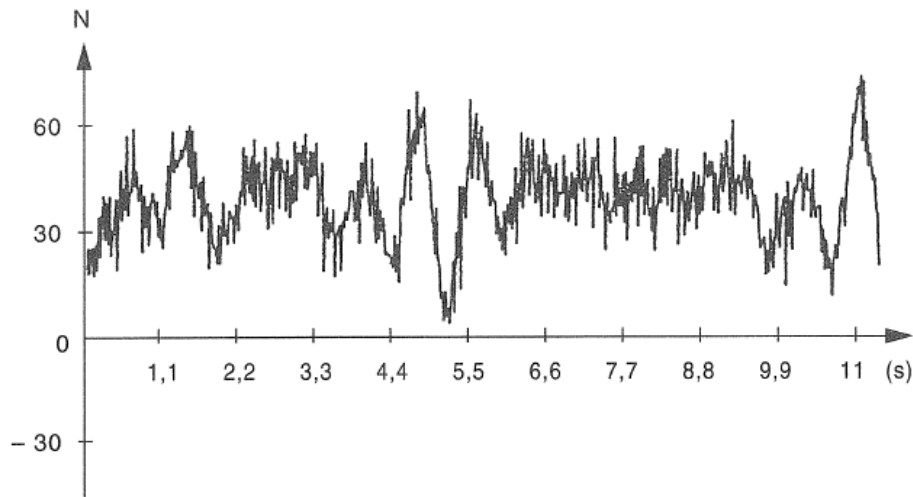


FIG. 4.12 – Effort de portance mesuré sur un cylindre à $Re = 2,6 \cdot 10^5$.

tourbillonnaires sont synchrones, n'est pas un paramètre très bien défini dans la littérature. On y trouve des valeurs de l'ordre de 2 à 6 diamètres, en régime subcritique.

La portance mesurée dépend donc de la longueur de cylindre pesée. Pour les enregistrements d'efforts présentés sur les figure 4.11 et 4.12 elle est de 5 diamètres. Sur la figure 4.11 on voit que l'amplitude de fluctuation de la portance est de l'ordre de $\pm 20N$, ce qui donne un coefficient C_L de l'ordre de 0,8 (le diamètre étant de 20 cm et la vitesse de l'écoulement de 50 cm/s).

Sur la figure 4.13 on présente une compilation de coefficients de portance (relatifs à l'écart type de l'effort). Ces coefficients sont obtenus à partir de mesure sur des fines tranches de cylindre, d'où sont absents, a priori, les effets de longueur de corrélation. Pour des nombres de Reynolds allant de 10^4 à 10^5 la figure donne un coefficient de l'ordre de 0,5 pour l'écart type de l'effort, soit environ 0,7 pour son amplitude, si l'on suppose que la portance fluctue

de manière sinusoïdale.

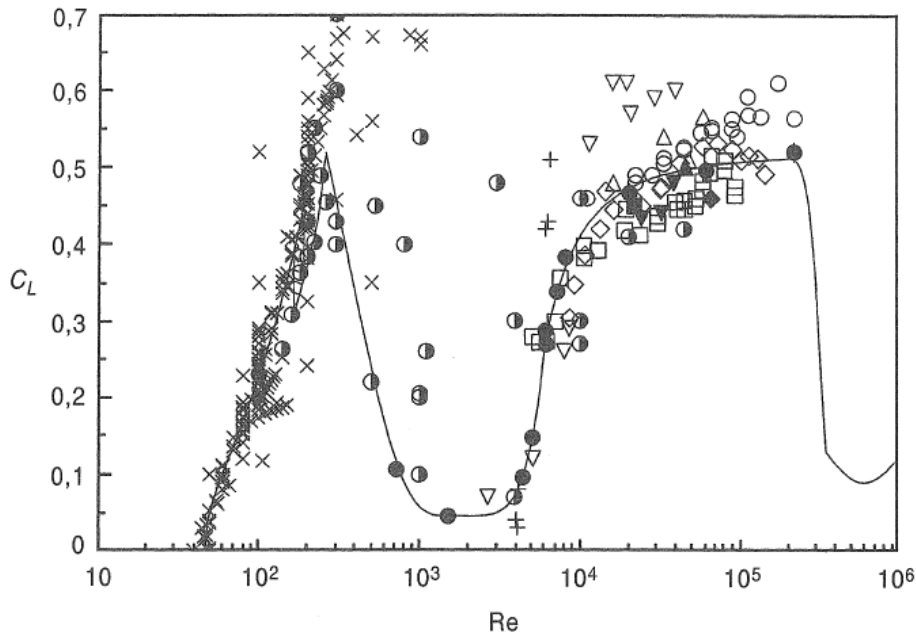


FIG. 4.13 – Coefficients de portance en écart type, pour des tranches de fines épaisseurs.

A des nombres de Reynolds critiques ou supercritiques, les fluctuations de la portance sont moins régulières, et il est difficile de définir une fréquence d'oscillation. A noter que dans le domaine des Reynolds critiques, la moyenne en temps de la portance n'est pas forcément nulle (fig. 4.12). Cette bizarrerie est due à une asymétrie de l'écoulement, dont on peut supposer qu'après une première séparation il se réattache d'un côté du cylindre mais pas de l'autre.

Ces efforts de portance alternée ne sont pas limités aux géométries circulaires et apparaissent pour toutes les formes de cylindres, même celles présentant des angles vifs. Par exemple, pour un carré en régime subcritique, le nombre de Strouhal est voisin de 0,15. Le caractère sinusoïdal de la portance est cependant beaucoup moins marqué que pour le cercle, et les coefficients associés sont plus faibles.

4.2.6 Effets de proximité

Il est fréquent, en offshore pétrolier, de trouver des cylindres groupés, que ce soient les barres des jackets ou les faisceaux de risers. Certains se trouvent alors placés dans le sillage d'autres et sont soumis à un courant de vitesse diminuée : c'est l'effet de **masquage**. Même les cylindres les plus amont sont soumis à un écoulement incident ralenti de par la présence des autres cylindres : c'est l'effet de **blocage**. Il en résulte des efforts de traînée diminués, dans des proportions souvent considérables. Par exemple Cuffe, Finn & Lambrakos (1990) rapportent que les efforts moyens induits par le courant sur la tour souple LENA ont été surestimés de 400 % lors du dimensionnement ! En ce qui concerne les risers suspendus dans

la tranche d'eau, il se pose aussi le problème de leurs contacts éventuels lorsqu'ils sont soumis à des efforts différents.

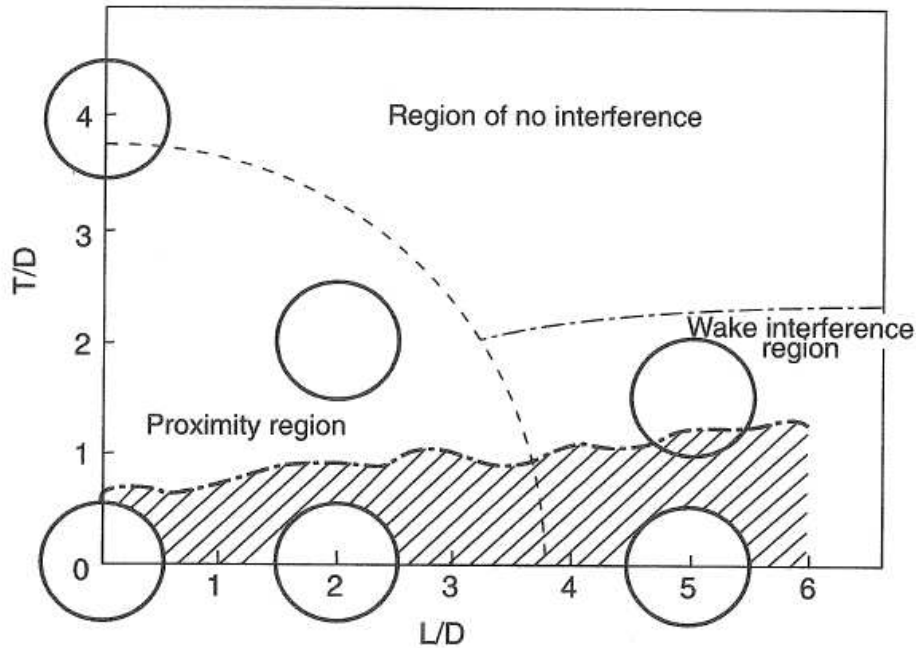


FIG. 4.14 – Zones d'interaction hydrodynamique pour deux cylindres placés dans un courant.

Le cas de deux cylindres a fait l'objet de nombreuses études expérimentales. Pour des espacements L/D (entraxe rapporté au diamètre) inférieurs à une certaine valeur (de l'ordre de 3 à 5, suivant l'incidence du courant), les sillages interagissent, pour n'en former éventuellement qu'un seul (fig. 4.14). Lorsque les deux cylindres sont l'un derrière l'autre, on observe une diminution du coefficient de traînée sur le cylindre amont jusqu'à des espacements L/D de 4 ou 5. Les efforts sur le cylindre aval sont bien davantage diminués (il se trouve même aspiré vers le cylindre amont lorsque L/D est inférieur à 2 ou 3). On trouve dans la littérature des diminutions de l'ordre de 50 % jusqu'à des espacements relatifs de 10.

Pour abondante que soit la littérature sur le sujet elle couvre principalement les écoulements en régime sub-critique. Il se pose donc le problème de l'approche à suivre à grands nombres de Reynolds, et lorsque la géométrie considérée consiste en un grand nombre de cylindres. Une méthode relativement facile à mettre en œuvre a été proposée par Huse (1991) et on la présente brièvement ci-dessous.

La méthode de Huse

Elle est basée sur des résultats théoriques de Schlichting, sur le profil de vitesses dans un sillage turbulent loin derrière le corps qui l'a généré. Strictement ils ne sont valables qu'à grande distance, de l'ordre de 100 diamètres. U étant la vitesse du courant, la diminution de vitesse dans le sillage s'écrit d'après Schlichting (*Boundary layer theory*, ch. XXIV, pp

742-743) :

$$\Delta U(x,y) = 0,95 U \sqrt{\frac{C_D D}{x}} \exp \left\{ -11,3 \frac{y^2}{C_D D x} \right\} \quad (4.17)$$

On en déduit aisément la réduction du coefficient de traînée sur un deuxième cylindre placé dans l'axe central du sillage à une distance L :

$$\frac{\Delta C_D}{C_D} = -1,9 \sqrt{\frac{C_D D}{L}} \quad (4.18)$$

soit une réduction de 60 % pour $L/(C_D D) = 10$, cohérente avec les résultats expérimentaux.

Huse a étendu cette approche aux configurations de cylindres multiples. Le principe est de partir des cylindres amont et de sommer les défauts de vitesse dans les sillages successifs². Huse introduit une prise en compte des effets de blocage, basée sur une théorie de fluide parfait. Il applique sa méthode à des configurations de faisceaux de cylindres, pour lesquelles des résultats expérimentaux sont disponibles, et obtient un accord satisfaisant avec les mesures, même pour des espacements relatifs assez faibles.

4.2.7 Cylindre à proximité du fond marin

Il s'agit là d'une configuration d'intérêt pour les études relatives aux pipelines, notamment concernant leur stabilité sous les efforts induits par la houle et le courant. En raison des irrégularités du fond marin, les pipelines ne sont pas partout en contact avec le fond, ce qui pose de nombreux autres problèmes comme celui des vibrations induites par le détachement tourbillonnaire.

Dans une théorie de fluide parfait, dès que le cylindre est décollé de la paroi, il y a écoulement à travers l'espace intersticiel, d'autant plus rapide que l'espace est réduit. Il y a donc dépression et le cylindre est attiré vers la paroi. A l'inverse, s'il y a contact, l'écoulement doit contourner le cylindre, induisant une portance répulsive (avec un coefficient C_L égal à 4,49).

En fluide visqueux il en va différemment. Le courant incident présente un profil de couche limite, dont l'épaisseur dépend de la rugosité du fond, de la profondeur d'eau, etc., et peut être bien supérieure au diamètre du cylindre. La viscosité limite la vitesse de l'écoulement dans l'espace intersticiel, avec le résultat que, pour de faibles distances au fond, la portance moyenne est répulsive. Lorsque le cylindre est posé sur le fond ou à faible distance, le lâcher tourbillonnaire alterné est inhibé ; il se forme une zone de recirculation derrière le cylindre, et l'écoulement extérieur se réattache au fond marin au-delà.

La littérature est assez confuse en ce qui concerne les coefficients de traînée et de portance à appliquer, la raison principale étant que les épaisseurs de couche limite (relativement au diamètre du cylindre) sont des paramètres variables d'une expérimentation à l'autre, pas toujours retranscrits. A cet égard, les valeurs obtenues en écoulement oscillant paraissent plus fiables, la couche limite de fond étant alors très mince.

2. En fait ce sont les carrés des défauts de vitesse qu'il faut sommer.

4.3 Cylindre en écoulement oscillant. La formule de Morison

On considère maintenant le cas d'un cylindre de section circulaire placé dans un écoulement oscillant de vitesse :

$$U = A \omega \sin \omega t \qquad V = 0$$

Le problème pratique associé est celui d'une pile verticale soumise à une houle périodique. Dans un plan horizontal contenant une tranche de la pile l'écoulement est de ce type.

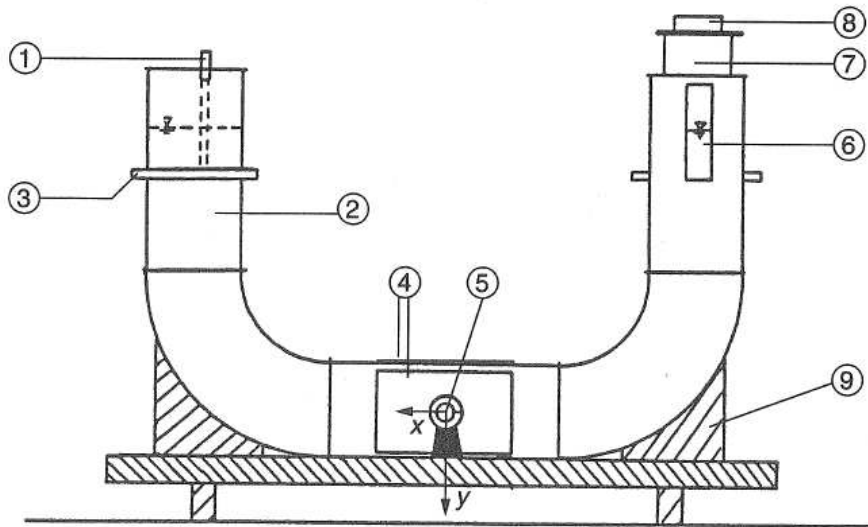


FIG. 4.15 – Le tube en U du NTH.

Ces essais sont habituellement conduits dans des tubes en U (fig. 4.15) qui permettent de générer des écoulements rigoureusement sinusoïdaux (mais à la seule fréquence propre de l'installation). Une autre solution est d'imposer un mouvement forcé au cylindre placé en eau calme. Cinématiquement ces deux procédés sont équivalents, et l'écoulement, dans le repère lié au cylindre, est le même. Les efforts hydrodynamiques diffèrent toutefois de la composante de Froude-Krylov ($\rho S L \dot{U}$, voir paragraphes 4.1.1 et 4.1.2). On peut aussi réaliser des essais sur houle régulière, en pesant une tranche de cylindre (vertical). Il faut alors que la longueur d'onde soit grande devant le diamètre, de sorte que les effets de diffraction soient limités (voir le chapitre suivant).

En plus du nombre de Reynolds, ici défini comme $Re = A \omega D / \nu$, il s'introduit un deuxième paramètre sans dimension, dit **nombre de Keulegan-Carpenter** :

$$K_C = \frac{A \omega T}{D} = 2 \pi \frac{A}{D} \qquad (4.19)$$

Plutôt que Re et K_C on utilise souvent les paramètres β et K_C , où $\beta = Re / K_C = D^2 / \nu T$, T étant la période. β est habituellement dénommé **paramètre de Stokes**. On peut lui donner diverses interprétations physiques, comme par exemple de représenter le carré du ratio diamètre sur épaisseur de couche limite. Lors d'essais en tube en U, le paramètre β reste constant à diamètre de cylindre donné.

Pour un tube lisse, ces deux paramètres caractérisent complètement l'écoulement, donc les efforts. Comment peut-on exprimer ceux-ci, en fonction de β et K_C ?

On a vu que la théorie potentielle prédit un effort proportionnel à l'accélération de l'écoulement, et aucun effet de la vitesse, alors que les essais en écoulement de vitesse constante indiquent un effort de traînée, proportionnel à son carré (plus correctement à $U|U|$, l'effort étant dirigé dans le même sens que l'écoulement).

L'écoulement étant périodique, on peut supposer que l'effort subi par le cylindre l'est également, et écrire :

$$F_x(t) = F_{C1} \cos \omega t + F_{S1} \sin \omega t + F_{C2} \cos 2\omega t + F_{S2} \sin 2\omega t + \dots$$

On peut interpréter $F_{C1} \cos \omega t$ comme un terme d'inertie (en phase avec l'accélération) et $F_{S1} \sin \omega t$ comme un terme de traînée (en phase avec la vitesse). On écrit alors :

$$F_x = \rho C_M S \dot{U} + \frac{1}{2} \rho C_D D U |U| \quad (4.20)$$

où l'on tire $C_M = 1 + C_m$ et C_D des essais par analyse harmonique (une autre technique est de minimiser la différence entre F_x mesuré et l'expression ci-dessus par moindres carrés ; on obtient alors le même C_M et un C_D peu différent).

Cette formule, connue sous le nom de **formule de Morison**, présente l'intérêt de produire deux termes, l'un en $\cos \omega t$, l'autre en $\sin \omega t^3$, lorsqu'on attend un signal périodique de pulsation ω . Elle suppose négligeables les harmoniques d'ordre supérieur.

Il est d'intérêt de comparer l'importance relative des deux termes. Faisant le rapport traînée/inertie (en module) on obtient :

$$\frac{F_{\text{traînée}}}{F_{\text{inertie}}} = \frac{8}{3\pi^3} \frac{C_D}{C_M} K_C \quad (4.21)$$

(on a ici approché $\sin \omega t |\sin \omega t|$ par $\frac{8}{3\pi} \sin \omega t$).

Avec $C_D \simeq 1$ et $C_M \simeq 2$, on a :

$$\frac{F_{\text{traînée}}}{F_{\text{inertie}}} \simeq 0,043 K_C \quad (4.22)$$

L'importance relative de la traînée et de l'inertie dépend donc du nombre de Keulegan-Carpenter. A faible K_C l'inertie est dominante, à grand K_C c'est la traînée qui l'emporte.

Les cas $K_C \rightarrow 0$ et $K_C \rightarrow \infty$ sont aussi ceux où l'on peut donner quelque justification physique à la formule de Morison. Pour K_C petit ($K_C < 2$ à 4 suivant la valeur de β) l'écoulement reste attaché au cylindre et la théorie potentielle est applicable (on retrouve le cas des «grands corps»). A grand K_C la fréquence du détachement tourbillonnaire devient grande devant la fréquence d'oscillation et on se rapproche asymptotiquement de l'écoulement en courant.

3. $\sin \omega t |\sin \omega t|$ est peu différent de $\sin \omega t$. Plus précisément :

$$\sin \omega t |\sin \omega t| = \frac{8}{3\pi} \sin \omega t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)\pi} \sin(2n+1)\omega t$$

La détermination expérimentale de C_M et C_D en fonction de β et K_C a fait l'objet d'innombrables campagnes. On présente sur les figures 4.16 et 4.17 les résultats de Sarpkaya, qui font référence. Ils ont été obtenus dans un tube en U, pour différentes tailles de cylindres.

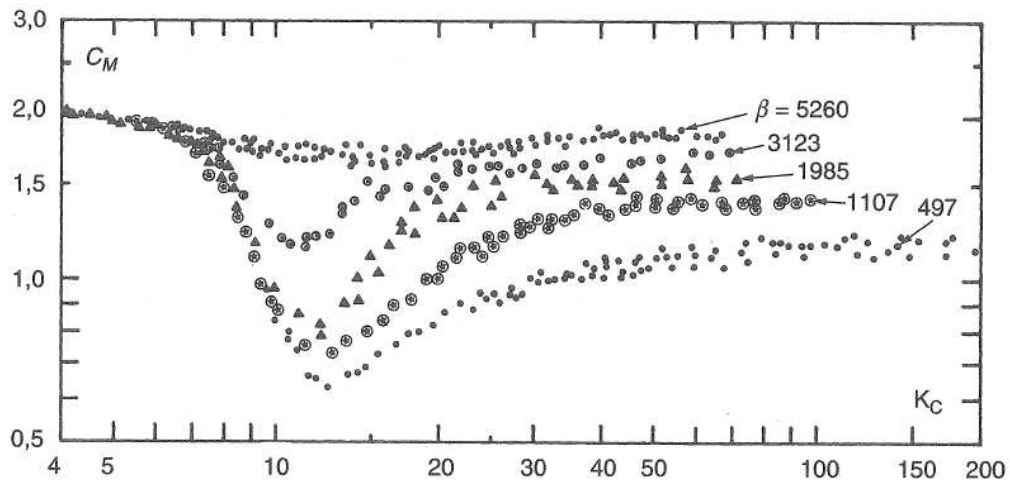


FIG. 4.16 – Cylindre en écoulement oscillant. Coefficients d'inertie ($C_M = 1 + C_m$) obtenus par Sarpkaya, en fonction de K_C et pour différentes valeurs de β .

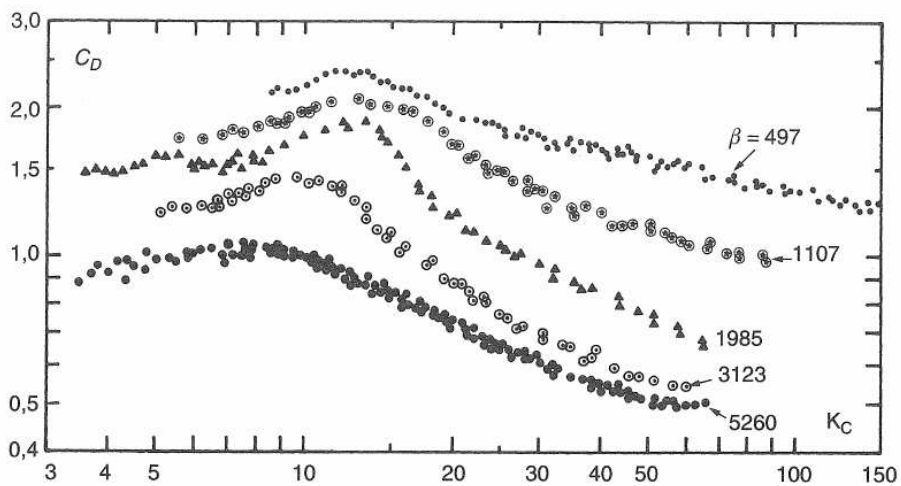


FIG. 4.17 – Cylindre en écoulement oscillant. Coefficients de traînée obtenus par Sarpkaya, en fonction de K_C et pour différentes valeurs de β .

Si l'on considère tout d'abord le coefficient d'inertie C_M ($C_M = 1 + C_m$), on constate qu'il est bien égal à sa valeur théorique de 2 à bas K_C . Lorsque K_C augmente il diminue doucement (en fait, aux très faibles valeurs de K_C il dépasse — très légèrement — 2), puis chute jusqu'à un minimum qui dépend fortement de β . Pour $\beta < 2000$ ce minimum est inférieur à 1 (C_m est négatif!). Il est réconfortant de constater qu'aux grandes valeurs de β (qui nous intéressent en pratique), C_M est assez voisin de 2 quelle que soit la valeur de K_C .

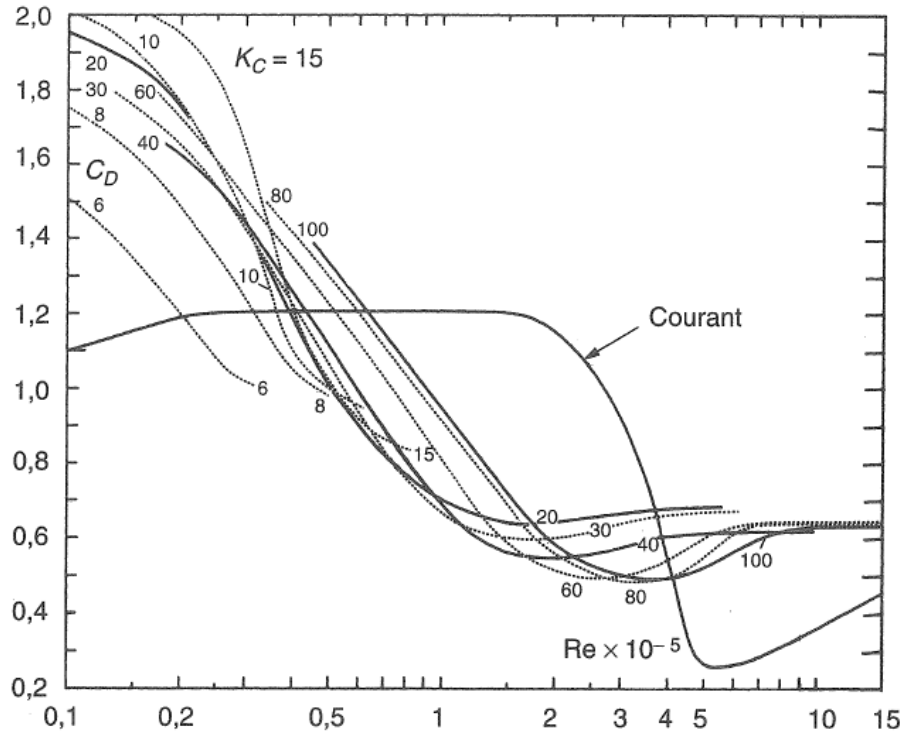


FIG. 4.18 – *Cylindre en écoulement oscillant. Coefficients de traînée en fonction de $Re = \beta \times K_C$.*

La figure 4.18 présente les mêmes points expérimentaux que la figure 4.17, avec $Re = \beta K_C$ en abscisse, et K_C en paramètre. Lorsque $K_C \rightarrow \infty$ on s'attend a priori à retrouver le $C_D(Re)$ du cylindre en courant permanent. Les résultats de Sarpkaya ne vont pas au-delà de $K_C = 100$, mais ils ne semblent pas converger vers cette courbe. En particulier la zone de Reynolds critique est décalée vers la gauche, et peu marquée, comme pour un cylindre rugueux. Le fait que le cylindre repasse dans son propre sillage a pour effet de déclencher plus tôt la transition à la turbulence.

Revenant maintenant à la figure 4.17 et parcourant les résultats de la droite ($K_C = 100$) vers la gauche, on note que le coefficient de traînée croît jusqu'à un maximum pour $K_C \sim 10$. Une interprétation de ce comportement est que la vitesse «effective» de l'écoulement est supérieure à la vitesse de référence, en raison du retour sur le cylindre de son sillage (on saisit mieux cet effet de sillage si l'on imagine le cylindre en mouvement forcé dans un fluide au repos). En deçà de $K_C \sim 10$ le détachement tourbillonnaire diminue et disparaît même complètement à bas K_C , ce qui explique la chute du C_D pour $K_C \rightarrow 0$.

Pour denses que soient les résultats de Sarpkaya ils ne couvrent pas tout le domaine d'intérêt du plan $[\beta, K_C]$, en particulier pas les très basses valeurs de K_C ni les grandes valeurs de β .

4.3.1 Coefficient de traînée à bas K_C

On a vu qu'à faible K_C l'inertie l'emporte sur la traînée et que, de plus, elle est bien prédite par la théorie potentielle. Il n'y a donc apparemment pas lieu de se soucier des valeurs prises par le coefficient de traînée.

Ceci est vrai des structures fixes, mais dans le cas de structures mobiles il peut être nécessaire d'évaluer l'amortissement apporté par la traînée. Ce problème se pose de façon aiguë dans la prédiction de certains comportements résonnants, comme les oscillations basse fréquence des structures ancrées, étudiées au chapitre 6.

Dans le cas où l'écoulement reste attaché et laminaire, la force d'amortissement (en phase avec la vitesse) est due pour moitié au frottement pariétal (et pour l'autre à la modification du champ de pression due à la viscosité) et le coefficient de traînée est donné par :

$$C_D = \frac{3\pi^3}{2K_C} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\beta}} + O\left(\frac{1}{\beta}\right) \right) \quad (4.23)$$

C_D est alors inversement proportionnel à K_C : la force de traînée ne dépend plus quadratiquement de la vitesse mais linéairement.

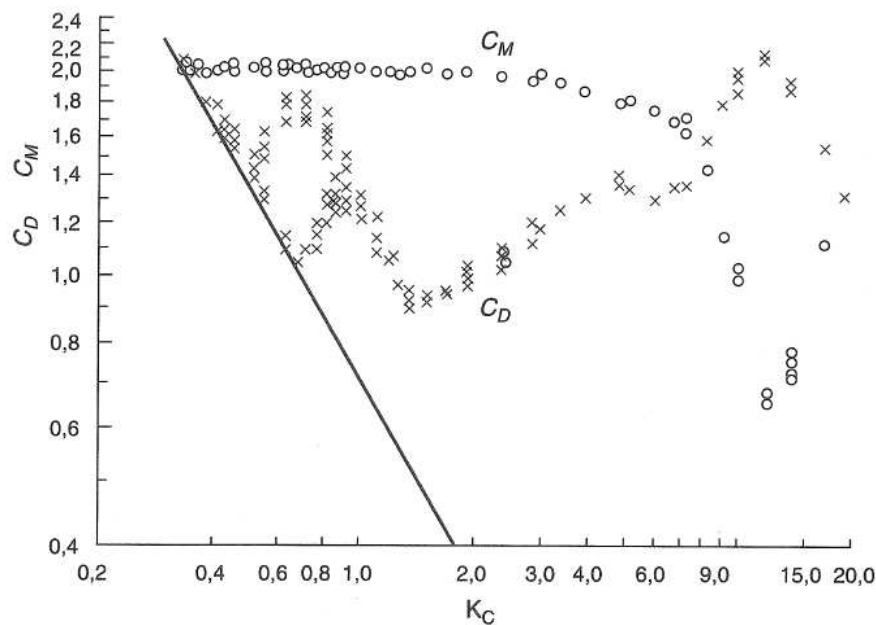


FIG. 4.19 – Cylindre en écoulement oscillant à bas K_C . Coefficients d'inertie ($C_M = 1 + C_m$) et de traînée à $\beta = 1380$.

Comme le montrent les figures 4.19 et 4.20 le domaine de validité de cette relation est plutôt réduit. Lorsque β et/ou K_C augmentent, des instabilités tridimensionnelles apparaissent (instabilité de Honji) et l'écoulement devient turbulent. La relation ci-dessus reste apparemment applicable, sous condition de remplacer dans le paramètre β la viscosité moléculaire ν par une viscosité turbulente ν_e , considérablement supérieure (de l'ordre de 5 à 50 fois).

D'après Sarpkaya, le minimum du coefficient de traînée est associé avec le début de la séparation. On note, sur les figures 4.19 et 4.20, que la position de ce minimum passe de $K_C \simeq 1,5$ pour $\beta = 1380$ à $K_C \simeq 4$ pour $\beta = 11240$. Corrélativement sa valeur diminue de 1 à 0,5.

Dans le cas du mouvement de dérive lente des plates-formes semi-submersibles, les nombres de Keulegan-Carpenter (rapportés au diamètre des colonnes) sont compris entre 0 et 5, et les

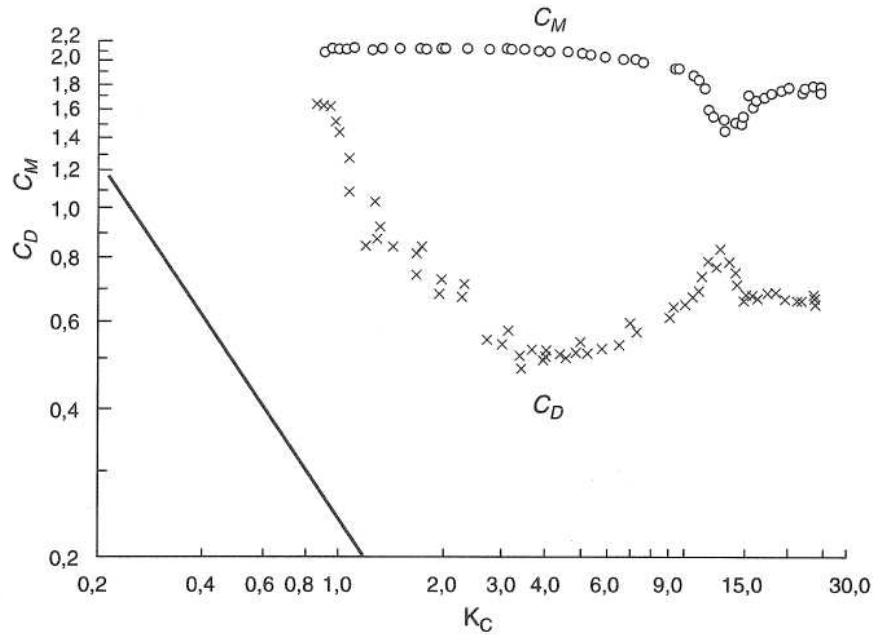


FIG. 4.20 – *Cylindre en écoulement oscillant à bas K_C . Coefficients d'inertie ($C_M = 1 + C_m$) et de traînée à $\beta = 11\,240$.*

paramètres β sont très élevés, de l'ordre de 10^6 ou 10^7 . On conçoit que le choix du coefficient de traînée pose quelque problème ! La figure 4.21 montre que des minima du C_D très proches de zéro ont été obtenus expérimentalement à des β de l'ordre de 10^5 . Sur cette figure on note aussi que la rugosité joue un rôle important et qu'elle fait remonter le coefficient de traînée.

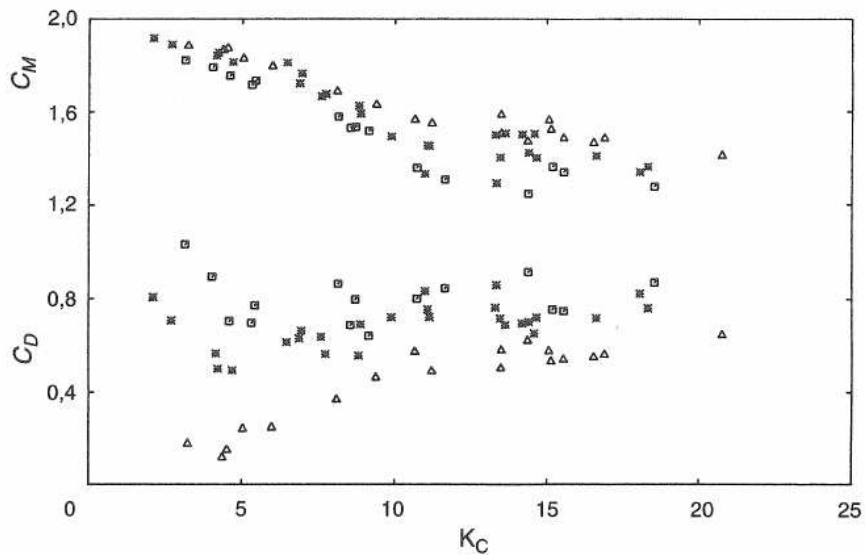


FIG. 4.21 – *Cylindre vertical sous houle régulière. Coefficients d'inertie C_M et de traînée à grands nombres de Reynolds, pour des surfaces lisses (Δ) et rugueuses ($\square *$).*

4.3.2 Cylindres de section non circulaire

C'est par exemple le cas des «pontons» de plates-formes semi-submersibles ou à lignes tendues, en général de section rectangulaire ou carrée, avec des angles vifs, arrondis ou biseautés. Là aussi un problème qui se pose est celui du choix du coefficient de traînée à bas K_C .

La présence d'angles vifs implique que l'écoulement se sépare toujours, quel que soit le nombre de Keulegan-Carpenter. Dans le cas d'un cylindre à section carrée, une analyse asymptotique donne 4,2 comme valeur limite de C_D quand K_C tend vers zéro. A cette valeur, obtenue en supposant nulle la viscosité, il faut éventuellement rajouter les effets du frottement visqueux. La figure 4.22 montre les coefficients de traînée mesurés sur un cylindre de section carrée, à des β de l'ordre de $5 \cdot 10^4$. A noter qu'il n'y a pas de minimum de C_D , à l'inverse de ce qui se produit pour le cylindre de section circulaire : lorsque K_C augmente le coefficient de traînée décroît de façon monotone jusqu'à sa valeur asymptotique, donnée pour égale à 2 dans la littérature, quel que soit le nombre de Reynolds. Là aussi des interprétations basées sur l'effet de sillage permettent de prédire l'évolution du coefficient de traînée jusqu'à des très basses valeurs de K_C .

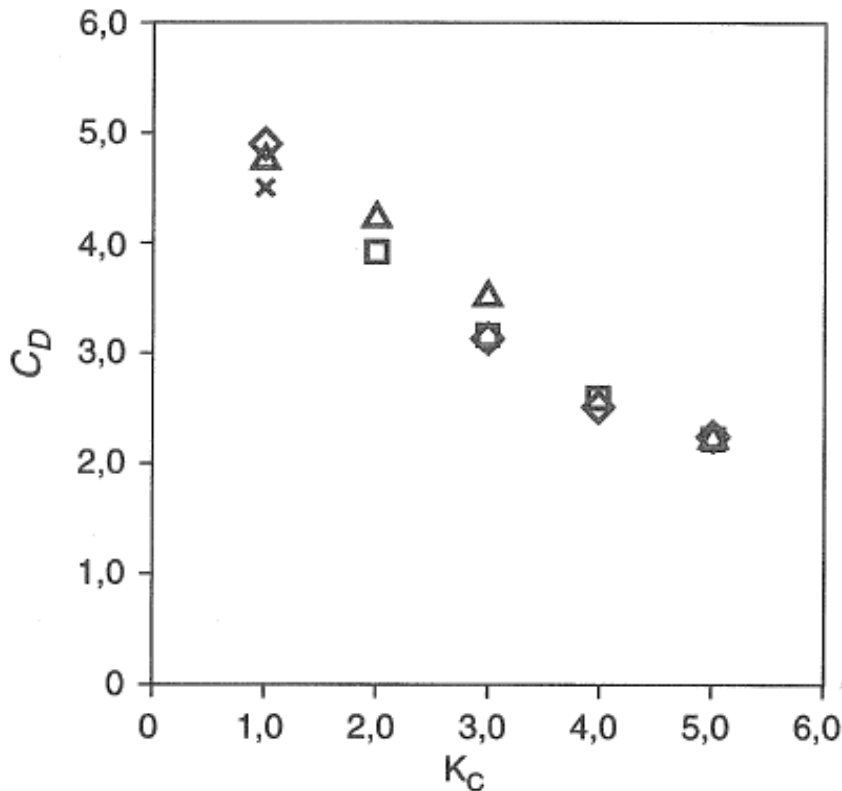


FIG. 4.22 – Carré de 35 cm de côté en écoulement oscillant. Coefficient de traînée à bas K_C . Périodes d'oscillation : 1,75 s (carrés) ; 2 s (cercles) ; 5 s (triangles).

Dans le cas où les angles sont arrondis ou biseautés, on retrouve à bas K_C un comportement similaire à celui observé pour le cylindre circulaire, avec une chute du coefficient de traînée.

A l'inverse, pour une plaque sans épaisseur de largeur b , le coefficient de traînée à bas

K_C , toujours d'après Bearman *et al.*, se comporte comme $7,8 K_C^{-1/3}$, K_C étant alors défini comme $2\pi A/b$.

Des pontons à angles vifs sont donc préférables à des pontons à angles arrondis si l'on veut amortir le mouvement de dérive lente d'une plate-forme semi-submersible. En revanche les efforts moyens d'ancrage dus au courant se trouveront accrus.

On insiste sur le fait que ces considérations, comme la formule de Morison, supposent un mouvement rigoureusement sinusoïdal. Il n'est pas évident qu'elles restent valides dans le cas d'un mouvement complexe, formé par exemple de la superposition d'un mouvement (irrégulier) aux fréquences de houle et d'un mouvement (à bande étroite) à la fréquence propre du système.

4.3.3 Cylindre à proximité du fond marin

Dans une théorie de fluide parfait, la proximité du fond marin entraîne une augmentation du coefficient de masse ajoutée, qui atteint la valeur théorique de 2,29 pour un cylindre posé sur le fond (soit $C_M = 1 + C_m = 3,29$).

Les investigations expérimentales menées sur cette configuration ont confirmé cette valeur, au moins pour les faibles nombres de Keulegan-Carpenter. Elles ont aussi montré une augmentation sensible du coefficient de traînée C_D lorsque le cylindre se rapproche du fond, des valeurs de l'ordre de deux fois celles en fluide illimité étant alors atteintes.

Ces augmentations des coefficients de masse ajoutée et traînée ne se font sentir qu'en deçà d'une distance au fond de l'ordre d'un diamètre.

4.3.4 Cylindre en écoulement orbital

On considère maintenant le cas d'un cylindre non plus vertical, mais horizontal, d'axe perpendiculaire à la direction de propagation de la houle, et complètement immergé.

Un phénomène remarquable, apparu lors d'essais en canal à houle, est une chute très rapide du coefficient d'inertie C_M aux faibles valeurs de K_C (figure 4.23). Cette chute est due à ce qu'il s'établit, autour du cylindre, une circulation de valeur moyenne non nulle. Par effet Magnus il s'ensuit une portance qui vient diminuer, de façon spectaculaire, les efforts d'inertie.

A noter que ce phénomène s'observe également pour des cylindres de section carrée ou rectangulaire, que les angles soient vifs ou arrondis. Les implications en ce qui concerne le dimensionnement des structures réelles (pontons des plates-formes semi-submersibles), et le calcul de leur réponse à la houle, ne sont pas très claires.

4.4 Cylindre circulaire en écoulement sinusoïdal + courant

4.4.1 Cas colinéaire

On considère maintenant un écoulement du type :

$$U = U_0 + A\omega \sin \omega t \qquad V = 0 \qquad (4.24)$$

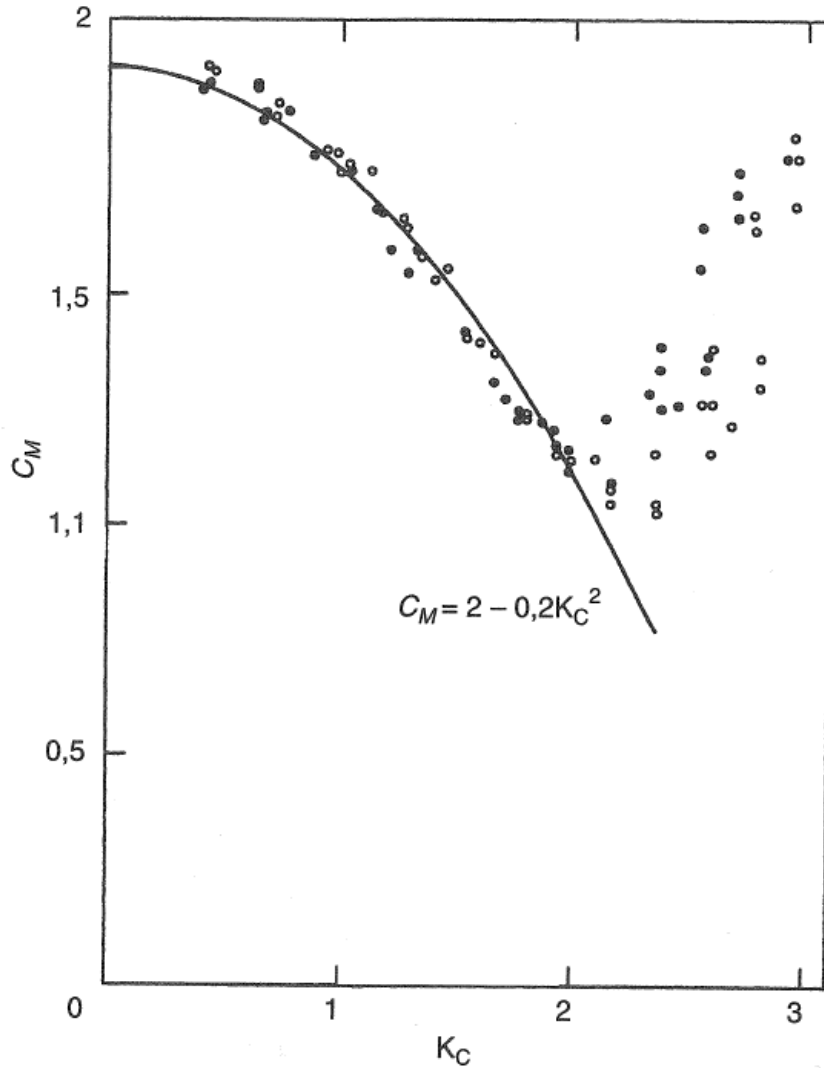


FIG. 4.23 – *Cylindre horizontal sous houle régulière. Coefficient d'inertie C_M en fonction de K_C .*

C'est par exemple le cas d'une tranche de pile verticale soumise à la superposition de la houle et du courant.

Il est évidemment tentant de continuer à utiliser la formule de Morison :

$$F_x = \rho C_M S \dot{U} + \frac{1}{2} \rho C_D D U |U|$$

et de recalculer les coefficients C_M et C_D sur les paramètres adimensionnels de l'écoulement, qui sont maintenant trois, par exemple :

$$\beta = \frac{D^2}{\nu T} \quad K_C = \frac{2\pi A}{D} \quad r = \frac{U_0}{A\omega}$$

Il faut s'attendre à ce que ce troisième paramètre r joue un rôle important. Pour $r > 1$, l'écoulement ne se renverse jamais : on se retrouve dans une situation voisine de l'écoulement en courant seul, il y a séparation quelle que soit la valeur de K_C . Pour $r < 1$ l'écoulement se renverse périodiquement : si K_C est suffisamment petit il n'y a pas de séparation.

Le problème qui se pose est celui de l'information que l'on recherche.

On peut vouloir exprimer la valeur moyenne des efforts, pour dimensionner un ancrage. On peut aussi être intéressé par la composante cyclique à la pulsation ω , pour étudier la réponse dynamique d'une structure. Ou encore par la valeur maximale de l'effort sur un cycle d'oscillation, par exemple pour étudier la stabilité d'une conduite sur le fond marin.

Malheureusement on ne dispose que de deux paramètres à ajuster : C_M et C_D .

Des essais systématiques ont été effectués par Verley, sur un cylindre oscillant dans un canal de circulation. Les figures 4.24 et 4.25 présentent les coefficients de traînée déduits des essais, et obtenus de deux façons différentes : en identifiant les composantes en $\sin \omega t$ des efforts, ou en identifiant leurs valeurs moyennes. Les paramètres de l'écoulement sont, en abscisse, $A/D = K_C/2\pi$, et, pour les différentes courbes, $U_0 T/D = K_C r$. Le paramètre β est compris entre 200 et 500.

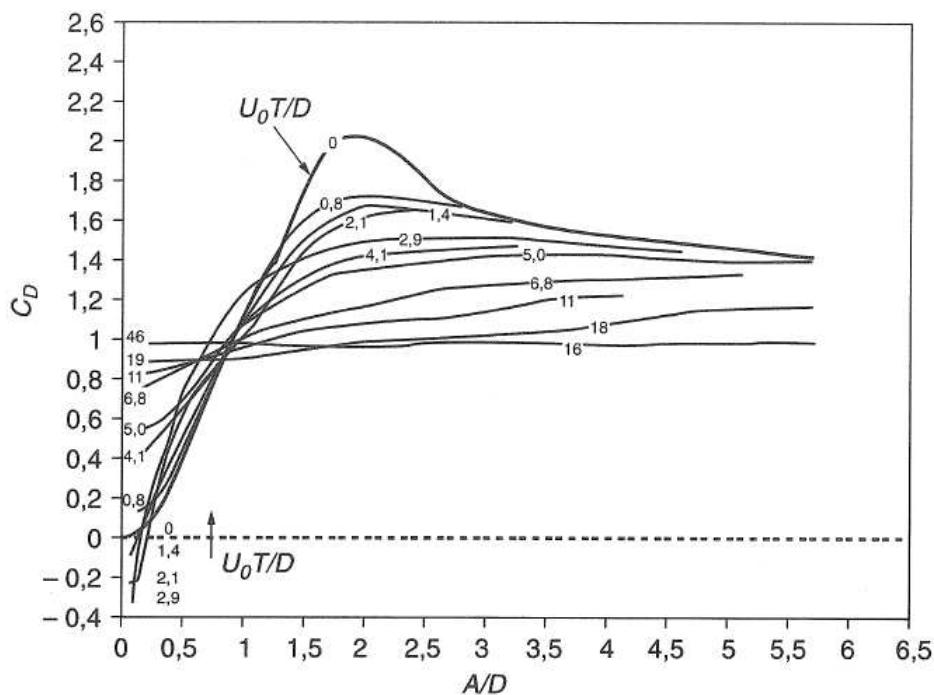


FIG. 4.24 – Cylindre circulaire en écoulement sinusoïdal + courant. Coefficient de traînée obtenu par identification de la composante en phase avec la vitesse fluctuante.

On constate que les courbes portées sur l'une et l'autre figure ne se ressemblent absolument pas, sauf pour $U_0 T/D > 20$ où elles convergent vers la droite $C_D = 1$ (on est alors en écoulement à traînée dominante). On est donc amené à conclure que, sauf pour les grandes valeurs de $U_0 T/D$, la formule de Morison rend mal compte de la réalité physique.

Sur ces deux figures on peut aussi noter que les coefficients de traînée prennent des valeurs négatives, pour certaines combinaisons des valeurs des paramètres A/D et $U_0 T/D$. En ce qui concerne la partie fluctuante de l'effort, C_D est négatif aux faibles valeurs de A/D (inférieures à 0,2) et pour $U_0 T/D$ de l'ordre de 2 à 3. La période T est alors environ la moitié de celle du lâcher tourbillonnaire alterné, et donc à peu près égale à celle des fluctuations d'effort *in-line* sur un cylindre fixe. Ce comportement suggère la possibilité de vibrations naturelles, dans le sens de l'écoulement, pour un cylindre sur appui élastique. C'est effectivement ce que l'on

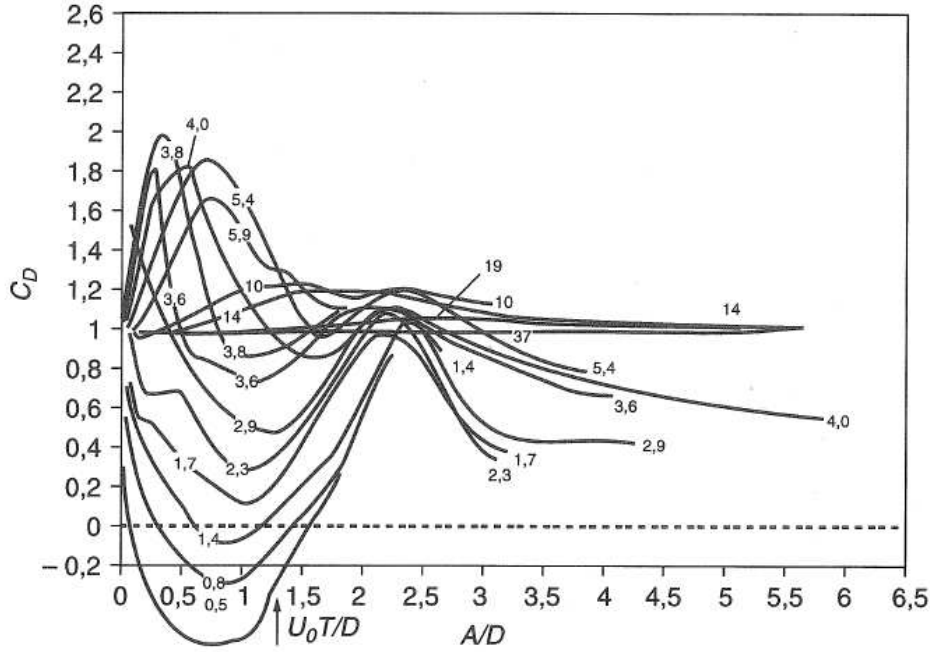


FIG. 4.25 – *Cylindre circulaire en écoulement sinusoïdal + courant. Coefficient de traînée obtenu par identification de l'effort moyen.*

observe (voir le paragraphe 4.5.3).

Sur la figure 4.25 on constate que l'effort moyen de traînée peut aussi devenir négatif, à des vitesses réduites $U_0 T/D$ inférieures à 1, pour des amplitudes d'oscillation de l'ordre du diamètre.

Formulation des efforts de traînée en écoulements indépendants

Devant ce problème, certains ont proposé de séparer les efforts de traînée en deux termes :

$$F_x = \rho C_M S \dot{U} + \frac{1}{2} \rho C_{D0} D U_0 |U_0| + \frac{1}{2} \rho C_{D1} D A^2 \omega^2 \sin \omega t |\sin \omega t| \quad (4.25)$$

Un intérêt pratique est que les efforts de traînée moyens et les efforts de traînée fluctuants sont distincts, mais il reste le problème du choix des coefficients C_{D0} et C_{D1} en fonction des paramètres de l'écoulement. Choisir C_{D0} en fonction du seul nombre de Reynolds $U_0 D/\nu$ et C_{D1} en fonction de β et K_C revient à considérer que les deux écoulements n'interagissent pas, ce qui paraît contraire à la physique.

Néanmoins il semble bien que la formulation en «écoulements indépendants» soit préférable aux faibles valeurs du paramètre $U_0 T/D$, particulièrement lorsque la vitesse U_0 est lentement variable, et qu'on cherche à représenter des effets amortisseurs.

4.4.2 La stabilité des pipelines

Un autre exemple de l'inadaptation de la formule de Morison à bien rendre les efforts hydrodynamiques est fourni par les études de stabilité des conduites posées sur le fond marin, sous l'action de la houle et du courant.

Le principe de l'analyse de stabilité est de vérifier que la résistance horizontale du fond marin est supérieure à la valeur maximale de la composante horizontale de l'effort hydrody-

namique. Cette résistance du fond marin est généralement exprimée comme le poids apparent multiplié par un coefficient de frottement. On aboutit donc à l'inégalité, qui doit être vérifiée à tout instant :

$$[P - F_z(t)] f_c > k F_x(t) \quad (4.26)$$

où P est le poids apparent dans l'eau, $F_z(t)$ l'effort de portance, f_c le coefficient de frottement, k un coefficient de sécurité (en général 1,1) et $F_x(t)$ l'effort horizontal.

Si l'on applique la formule de Morison, ce dernier se relie à la cinématique de l'écoulement par :

$$F_x(t) = \frac{1}{2} \rho C_D D U |U| + \rho (1 + C_m) \pi \frac{D^2}{4} \dot{U} \quad (4.27)$$

où :

$$U(t) = U_0 + \frac{A \omega}{\text{sh } kh} \cos \omega t \quad (4.28)$$

(en houle régulière, h étant la profondeur). L'effort vertical s'exprime par :

$$F_z(t) = \frac{1}{2} \rho C_L U^2(t) \quad (4.29)$$

On a déjà indiqué que les valeurs théoriques, en fluide parfait, de C_m et C_L sont, respectivement, de 2,29 et 4,49 et que l'observation expérimentale, en écoulement purement sinusoïdal, donne des coefficients de traînée C_D environ deux fois supérieurs à leurs valeurs en fluide illimité. En ce qui concerne la portance mesurée en écoulement sinusoïdal, Sarpkaya obtient même des valeurs supérieures à 4,49, aux faibles nombres de Keulegan-Carpenter.

On s'est rendu compte qu'adopter des valeurs de cet ordre en écoulement mixte houle + courant conduit à surestimer les efforts hydrodynamiques et, par suite, à surdimensionner les revêtements de pipelines (pour les alourdir). Un exemple d'écarts entre efforts prédits numériquement et mesurés expérimentalement (en houle irrégulière + courant) est fourni par la figure 4.26. On constate que les pics négatifs de l'effort horizontal (lorsque vitesse de courant et vitesse de houle s'ajoutent) sont surestimés, de même que les pics de l'effort de portance.

Aussi trouve-t-on, dans certaines procédures recommandées pour le calcul de stabilité des pipes, des coefficients hydrodynamiques beaucoup plus faibles, par exemple $C_L = 0,9$ et $C_D = 0,7$. Une justification est que le calcul de stabilité comporte de nombreux autres points flous, comme le choix des conditions de houle, ou celui de la longueur de conduite sur laquelle les efforts de houle sont en phase (problème lié à son caractère multidirectionnel), ou encore celui des coefficients de frottement, et que les erreurs commises dans l'estimation des efforts sont compensées par d'autres mésestimations.

4.4.3 Cas perpendiculaire

Cette configuration est d'intérêt pour l'étude des vibrations induites par le détachement tourbillonnaire, abordée plus loin. On combine donc un écoulement uniforme de vitesse U_0 suivant x avec un écoulement oscillant suivant y ou, ce qui revient au même d'un point de vue cinématique et est plus facile à réaliser, un mouvement forcé transversal :

$$U = U_0 \quad Y = A \cos \omega t$$

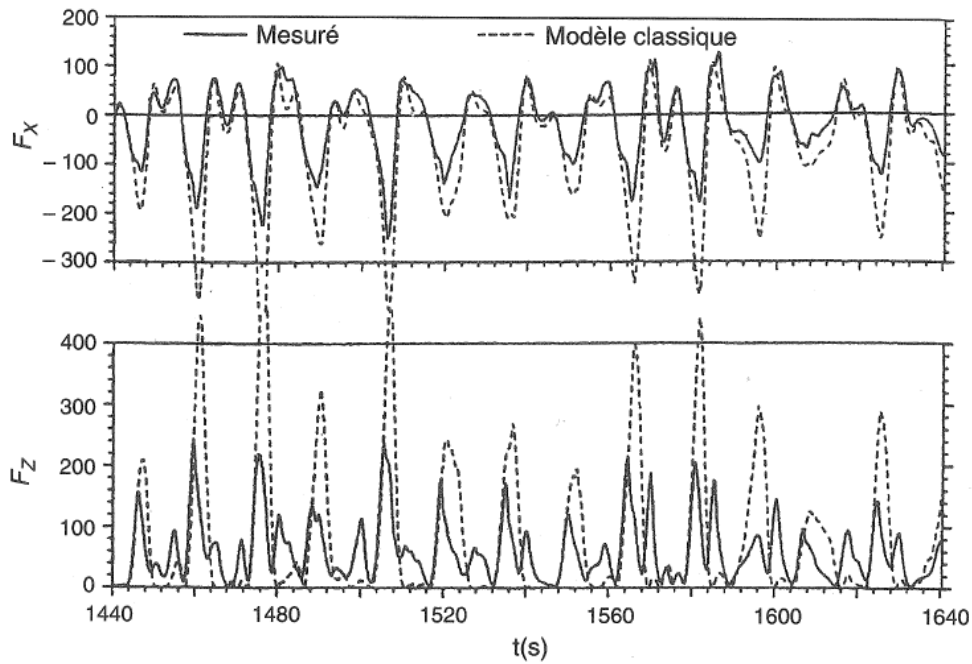


FIG. 4.26 – Efforts de traînée et de portance sur un pipeline, obtenus par un modèle classique.

De nombreux essais de ce type ont été effectués, dans le but de déterminer les coefficients de masse ajoutée et de traînée du mouvement transverse, en fonction des paramètres de l'écoulement. Comme dans le cas précédent, outre un nombre de Reynolds, ceux-ci sont au nombre de deux. Par exemple :

$$K_C = 2\pi \frac{A}{D} \quad \text{et} \quad r = \frac{U_0}{A\omega}$$

Dans ce genre de situation il est d'usage de recourir au paramètre U_R , vitesse réduite, défini par :

$$U_R = \frac{U_0 T}{D} = r K_C \quad (4.30)$$

De la mesure de l'effort transverse on extrait les composantes en $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$, et on en tire les coefficients «de masse ajoutée» C_{my} et «de traînée» C_{Dy} , tels que :

$$F_y = \rho C_{my} S A \omega^2 \cos \omega t + \frac{1}{2} \rho C_{Dy} D A^2 \omega^2 \sin \omega t |\sin \omega t|$$

Les figures 4.27 et 4.28 présentent les coefficients C_{my} et C_{Dy} obtenus expérimentalement par Sarpkaya (1978), en fonction de la vitesse réduite U_R , pour différentes valeurs de A/D , en écoulement subcritique. On constate que le coefficient de masse ajoutée varie dans des proportions très larges, de +2 à -1, avec une variation très rapide au voisinage de $U_R = 5$, et que le coefficient de traînée prend aussi des valeurs négatives pour certaines combinaisons de U_R et A/D , en particulier pour des vitesses réduites entre 5 et 6.

En conditions subcritiques le nombre de Strouhal est égal à 0,2. Une vitesse réduite de 5 signifie que la fréquence d'oscillation est égale à la fréquence du détachement tourbillonnaire sur un cylindre maintenu fixe.

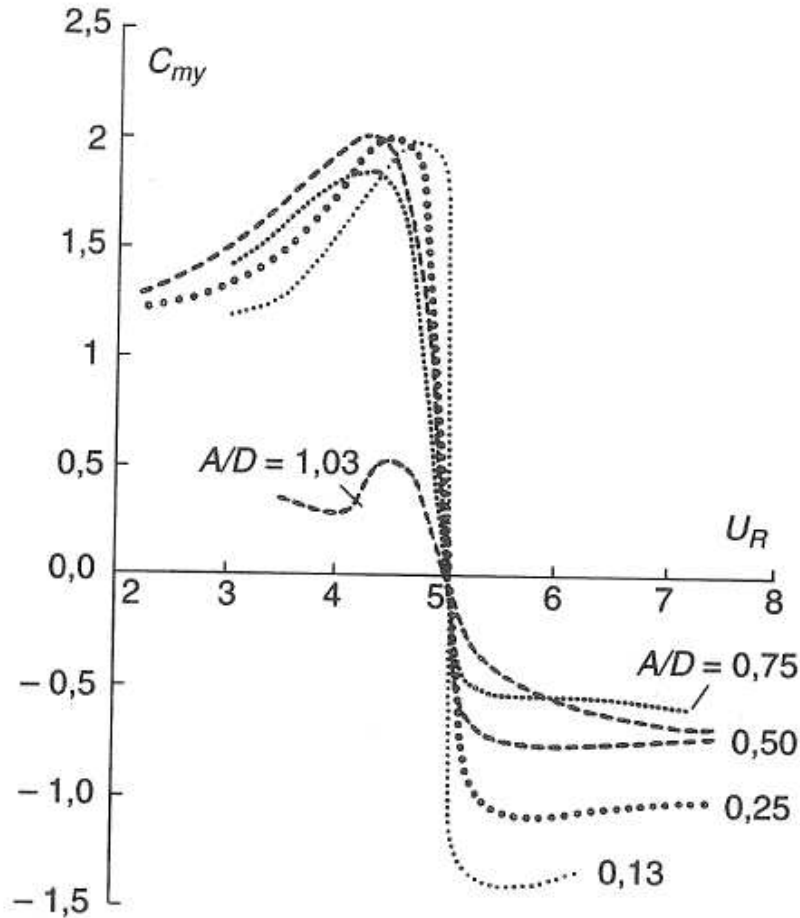


FIG. 4.27 – *Cylindre en mouvement forcé harmonique perpendiculairement à un courant. Coefficient de masse ajoutée C_{my} en fonction de la vitesse réduite U_R , pour différentes valeurs de A/D .*

Lorsque le cylindre est en mouvement forcé, la fréquence du détachement tourbillonnaire s'accorde, sur une certaine plage de vitesses réduites, à la fréquence du mouvement. C'est l'**accrochage**, ou *lock-in* en anglais. L'intensité des tourbillons détachés est renforcée et le déphasage, variable, de la portance avec le mouvement conduit à des valeurs de C_{my} et C_{Dy} variant rapidement avec la vitesse réduite.

Lorsque le rapport A/D de l'amplitude du mouvement au diamètre dépasse $1/2$, le détachement tourbillonnaire se désorganise et perd sa symétrie, trois (ou quatre) tourbillons se trouvant émis par cycle. Corrélativement le coefficient C_{Dy} redevient positif pour $A/D > 1$.

Le fait que le coefficient de traînée C_{Dy} soit négatif pour certaines combinaisons de valeurs de U_R et A/D suggère que, le cylindre tirant de l'énergie du fluide, des comportements instables peuvent être atteints. Ces comportements sont décrits dans la section suivante.

A noter que les coefficients de masse ajoutée et de traînée sont souvent définis différemment. Certains auteurs partent de la représentation de la force de portance, pour un cylindre fixe :

$$F_L = \frac{1}{2} \rho C_L D U_0^2 \sin 2\pi f_0 t \quad (4.31)$$

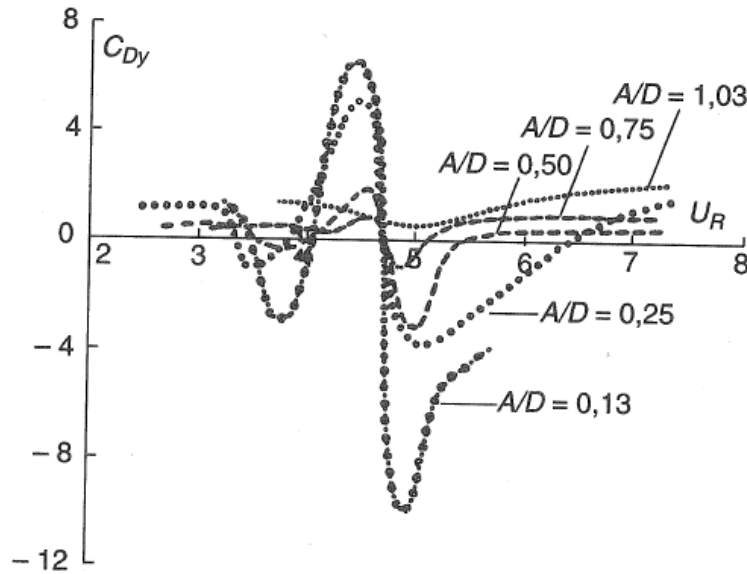


FIG. 4.28 – *Cylindre en mouvement forcé harmonique perpendiculairement à un courant. Coefficient de traînée C_{Dy} en fonction de la vitesse réduite U_R , pour différentes valeurs de A/D .*

et écrivent l'effort transverse, dans le cas d'un mouvement forcé à la pulsation ω :

$$F_y = \frac{1}{2} \rho D U_0^2 (C_{Lm} \cos \omega t + C_{LD} \sin \omega t) \quad (4.32)$$

Ces coefficients se relient aux précédents par :

$$C_{Lm} = 2\pi^3 C_{my} \frac{A}{D} \frac{1}{U_R^2} \quad (4.33)$$

$$C_{LD} = \frac{32\pi}{3} C_{Dy} \left(\frac{A}{D}\right)^2 \frac{1}{U_R^2} \quad (4.34)$$

Représentés graphiquement en fonction de A/D et U_R ils présentent encore plus de dispersion que C_{my} et C_{Dy} .

Augmentation de la traînée longitudinale

Un effet important du mouvement transverse est l'augmentation de l'effort de traînée F_{Dx} , par rapport au cas du cylindre fixe. Une interprétation intuitive est que la surface de prise au courant est augmentée par le mouvement transverse. Différentes formulations ont été proposées pour représenter cette modification du coefficient de traînée, comme :

$$C_D(A/D) = C_D(0) \left(1 + 2 \frac{A}{D}\right) \quad (4.35)$$

En fait, comme le montre la figure 4.29, l'augmentation du coefficient de traînée dépend aussi de la vitesse réduite. L'expression ci-dessus doit plutôt être considérée comme un majorant, pour des vitesses réduites de l'ordre de 5.

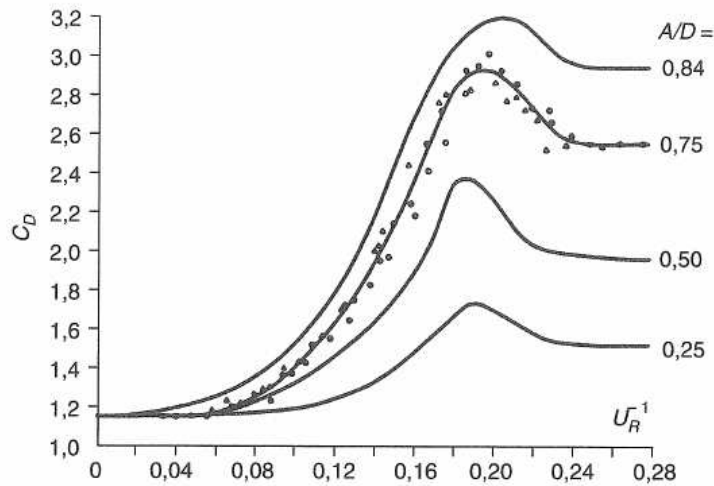


FIG. 4.29 – *Cylindre en mouvement forcé harmonique perpendiculairement à un courant. Coefficient de traînée C_{Dx} de l'effort in-line en fonction de la vitesse réduite U_R , pour différentes valeurs de A/D .*

4.5 Vibrations induites par les écoulements

Les résultats présentés au paragraphe 4.4.3 suggèrent qu'un cylindre sur appui élastique, placé dans un écoulement, puisse osciller naturellement dans la direction transverse si sa fréquence propre d'oscillation est proche de celle du détachement tourbillonnaire. C'est effectivement ce que l'on observe. Les manifestations en offshore pétrolier sont nombreuses : vibrations de câbles de remorquage, de risers sous l'effet du courant, etc.

Ces vibrations induites par le détachement tourbillonnaire ne sont qu'un type de vibration induite par les écoulements. Il en existe beaucoup d'autres, en particulier dans le cas de profils portants comme les tabliers de pont ou les ailes d'avion : le «flottement» et le «galop». Un comportement apparenté est le mouvement de *fish-tailing* (couplage lacet-embardée) pris par les navires ancrés. Pour plusieurs cylindres en proximité il existe aussi de nombreux types d'instabilité, dus à des interactions des sillages ou aux effets de masquage. Ces instabilités, qui apparaissent en général à des vitesses réduites élevées, ont été largement étudiées dans le domaine nucléaire, l'application concernée étant les échangeurs thermiques des centrales (voir par exemple le chapitre 5 du livre de Blevins).

Les cylindres circulaires isolés ne sont susceptibles que des seules instabilités induites par le détachement tourbillonnaire (VIV pour *Vortex Induced Vibrations*). Ce sont ces instabilités que l'on décrit dans le paragraphe suivant. On ne traite que des sections circulaires mais toute géométrie est concernée, dès lors qu'apparaît un détachement tourbillonnaire alterné, présentant une certaine périodicité. Dans le dernier paragraphe on présente brièvement le galop.

4.5.1 Vibrations induites par le détachement tourbillonnaire

Description du phénomène

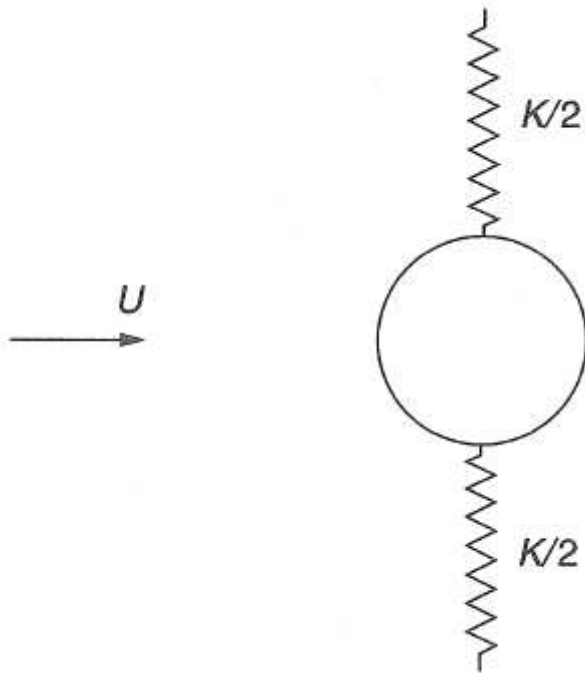


FIG. 4.30 – *Cylindre sur appuis élastiques soumis à un courant.*

Soit donc un cylindre de masse propre M (par unité de longueur), placé entre deux ressorts de raideur équivalente K (fig. 4.30). B dénote l'amortissement d'origine non hydrodynamique, déterminé par exemple par des essais d'extinction dans l'air. Suivant les expériences réalisées le cylindre peut être bloqué en x , ou également sur appui élastique, avec la même raideur K ou une raideur différente.

En eau calme la période propre d'oscillation suivant y est donnée par :

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{M + M_a}{K}} = \frac{1}{f_n}$$

où M_a est la masse ajoutée $\rho \pi D^2/4$ pour une section circulaire.

Dans un écoulement de vitesse U on observe que le cylindre, spontanément, prend un mouvement transverse, à peu près sinusoïdal, dès lors que la vitesse réduite $U_{Rn} = U T_n/D$ est comprise dans un certain intervalle, typiquement entre 5 et 8 (dans l'air). Si le mouvement en x n'est pas bloqué les trajectoires ressemblent à des huit plus ou moins aplatis, voire à des bananes (fig. 4.31).

Aussi faible que soit l'amortissement B du système, l'amplitude du mouvement transverse ne dépasse pas (environ) un diamètre. On a mentionné au paragraphe 4.4.3 qu'au-delà de $A/D = 0,5$ le lâcher tourbillonnaire se désorganise et que le coefficient de traînée C_{Dy} redevient positif pour $A/D \geq 1$. Une caractéristique de ces vibrations induites par le lâcher tourbillonnaire est qu'elles sont «auto-limitées» (à l'inverse du galop qui n'est pas borné).



FIG. 4.31 – Vibrations induites par le détachement tourbillonnaire. Exemple de trajectoire.

Le fait que les vibrations induites apparaissent sur une plage assez large de vitesses réduites U_{Rn} tient, d'une part à ce que la fréquence d'émission se cale sur la fréquence du mouvement, et d'autre part à ce que la fréquence propre change, la masse ajoutée variant fortement avec la vitesse réduite. Ce dernier effet est négligeable dans l'air mais dans l'eau il est appréciable, particulièrement pour des cylindres dont la masse propre M est comparable au déplacement $\rho \pi D^2/4$. Certains auteurs suggèrent l'introduction du concept de vitesse réduite vraie $U_R = UT/D$, où T est la période d'oscillation, plutôt que $U_{Rn} = UT_n/D$ où T_n est la période propre en eau calme. Comme le montre la figure 4.32, cela a pour effet de resserrer la plage de vitesses réduites, où apparaissent les vibrations transverses, à l'intervalle [5 8], comme dans l'air. Si d désigne la densité apparente $M/(\rho \pi D^2/4)$ du cylindre et si l'on considère que le coefficient de masse ajoutée varie, grossièrement, de +2 en début d'accrochage à $-1/2$ à la fin, on en déduit que les vibrations transverses se produisent entre les deux valeurs de vitesse réduite :

$$5 \sqrt{\frac{d+1}{d+2}} \leq U_{Rn} \leq 8 \sqrt{\frac{d+1}{d-1/2}} \quad (4.36)$$

On est tenté de conclure que, dès que la densité d est inférieure à $1/2$, il n'y a pas de limite supérieure à la plage de valeurs de U_{Rn} où se produisent les vibrations induites.

L'amplitude réduite A/D du mouvement transverse en fonction de U_{Rn} dépend de nombreux paramètres comme :

- le taux d'amortissement du système (dans l'air, dans un bien moindre mesure dans l'eau) ;
- la «masse réduite» (*mass ratio*) du cylindre $M/(\rho D^2)$ (sa densité apparente au facteur

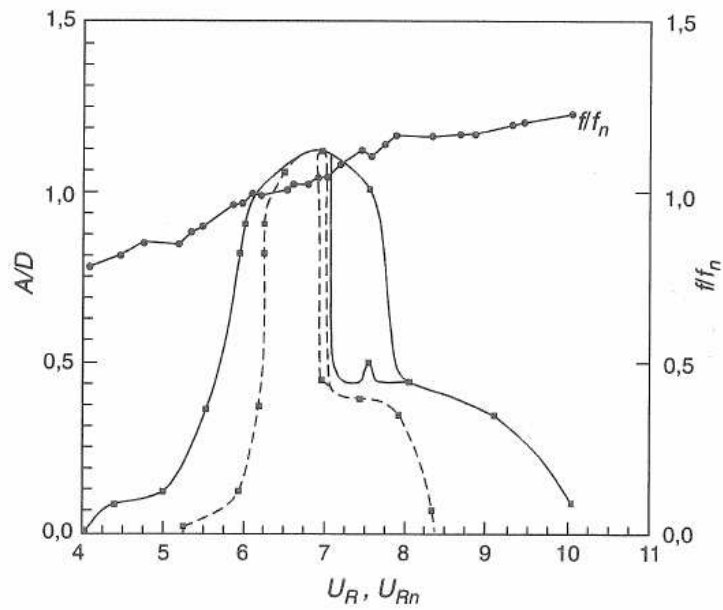


FIG. 4.32 – Amplitude des vibrations induites (rapportée au diamètre), en fonction de la vitesse réduite $U_{Rn} = U/(f_n D)$ où f_n est la fréquence propre de vibration en eau calme (trait continu), et en fonction de $U_R = U/(f D)$ où f est la fréquence réelle de vibration (tirets).

$\pi/4$ près) ;

- le blocage ou non du mouvement in-line suivant x ;
- la longueur du cylindre vis à vis de son diamètre ;
- le nombre de Reynolds de l'écoulement ($U D/\nu$) ;
- les conditions expérimentales (turbulence et uniformité de l'écoulement généré, système mécanique, etc.).

Il se pose aussi le problème préalable de la définition de l'amplitude A de la réponse, le mouvement n'étant généralement pas strictement sinusoïdal (figure 4.33).

Dans le paragraphe suivant on dresse un bref état de l'art sur son estimation pratique.

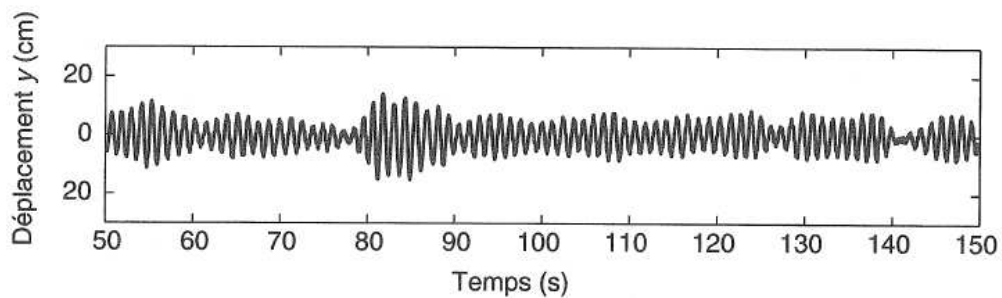


FIG. 4.33 – Exemple d'enregistrement du mouvement transverse en fonction du temps (source Ifremer).

Estimation de la réponse

On considère toujours le problème plan d'une tranche de cylindre soumise à un écoulement uniforme de vitesse U . On peut idéaliser l'équation du mouvement transverse par :

$$(M + M_a) \ddot{Y} + B \dot{Y} + K Y = \frac{1}{2} \rho C_L(U_R, A/D) U^2 D \sin 2\pi f_0 t \quad (4.37)$$

où f_0 est la fréquence du détachement tourbillonnaire. B est l'amortissement d'origine non hydrodynamique (structurel).

A la résonance la fréquence f_0 coïncide avec la fréquence propre d'oscillation si bien que les termes d'inertie et de raideur dans le premier membre se compensent. L'amplitude de la réponse dépend alors directement de l'amortissement par :

$$A = \frac{1/2 \rho C_L U^2 D}{2 \pi f_0 B} \quad (4.38)$$

ou, en introduisant le taux d'amortissement ζ vis à vis de l'amortissement critique $B_C = 4 \pi f_0 (M + M_a)$:

$$\frac{A}{D} = \frac{C_L(U_R, A/D)}{4 \pi S_t^2 K_S} \quad (4.39)$$

où $K_S = 4 \pi \zeta (M + M_a)/(\rho D^2)$ est un «paramètre de stabilité» dit aussi «nombre de Scruton» et S_t le nombre de Strouhal $f_0 D/U$ (on suppose ici que la fréquence d'oscillation est peu différente de la fréquence naturelle du détachement tourbillonnaire, sur le cylindre maintenu fixe).

La dépendance du coefficient de portance C_L vis à vis de la vitesse réduite U_R et de l'amplitude réduite A/D doit être prise en compte dans la résolution de cette équation. Pour cela il est nécessaire de recourir à des informations d'origine expérimentale telles que celles exposées au paragraphe 4.4.3 (le coefficient C_{LD}).

Lorsque la vitesse réduite est voisine de 5 (et en régime subcritique), la formule simple suivante, obtenue par régression, peut être utilisée (Blevins, 1977) :

$$C_L(A/D) = a + b \frac{A}{D} + c \left(\frac{A}{D} \right)^2 \quad (4.40)$$

avec $a = 0,35$; $b = 0,60$; $c = -0,93$.

La détermination de A/D requiert alors la résolution d'une équation du deuxième degré.

On rappelle que dans les écritures ci-dessus $B = \zeta B_C$ représente l'amortissement d'origine non hydrodynamique. Typiquement ζ est de l'ordre de quelques pour cent, si bien que le paramètre de stabilité K_S est d'ordre 1 ou inférieur à 1. Il résulte alors que l'amortissement joue peu et que l'amplitude à la résonance est donnée par $C_L(A/D) \simeq 0$, soit, avec l'expression polynômiale ci-dessus, $A/D \simeq 1$. Il en va différemment pour les structures dans l'air, pour lesquelles la masse propre M est bien supérieure à ρD^2 , si bien que le paramètre de stabilité prend des valeurs élevées.

Cette approche est très simplifiée, et ne rend pas compte par exemple du mouvement in-line. Dans la plupart des investigations expérimentales effectuées seul le mouvement transverse est autorisé. Comme le montre la figure 4.34, différentes courbes de réponse sont obtenues lorsqu'on fait varier la raideur in-line du montage. Il n'existe malheureusement pas de méthode pratique de prise en compte du mouvement in-line.

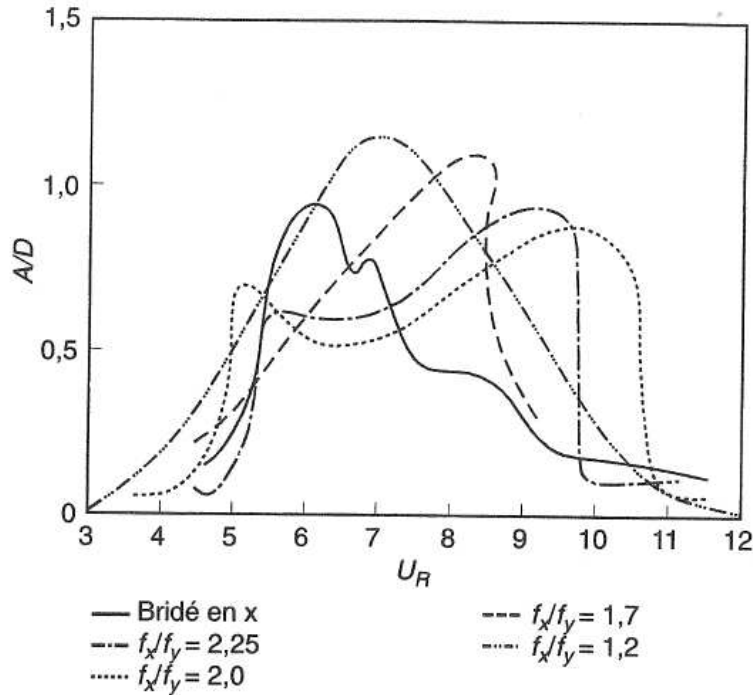


FIG. 4.34 – Effet de la raideur du mouvement en x sur l'amplitude de la réponse transversale.

Une autre difficulté a trait à la longueur du cylindre vibrant, vis à vis de son diamètre. Au-delà d'une certaine longueur le détachement tourbillonnaire ne se produit plus de façon synchrone tout le long du cylindre et il s'ensuit une réduction de la portance globale. Ce caractère est souvent exprimé via le concept de longueur de corrélation. Etant données deux tranches de cylindres, distantes de l , sur lesquelles sont mesurés les efforts de portance, soit $F_{L1}(t)$ et $F_{L2}(t)$, on définit le coefficient de corrélation $C(l)$:

$$C(l) = \frac{R_{12}(0)}{\sqrt{R_{11}(0) R_{22}(0)}} \quad (4.41)$$

où :

$$R_{ij}(\tau) = E [(F_{Li}(t) - \overline{F_{Li}}) (F_{Lj}(t + \tau) - \overline{F_{Lj}})] \quad (4.42)$$

E désignant la valeur moyenne en temps.

La longueur de corrélation est alors définie par :

$$L_C = \int_0^{\infty} C(l) dl \quad (4.43)$$

Pour un cylindre maintenu fixe la longueur de corrélation est de l'ordre de quelques diamètres (en régime subcritique). Lorsqu'il entre en vibration transversale, le détachement tourbillonnaire tend à se synchroniser et la longueur de corrélation augmente. Réciproquement l'augmentation de longueur de corrélation accroît la portance globale et renforce l'accrochage. C'est donc un paramètre important dans l'étude des vibrations induites, en particulier dans le cas de cylindres de grande longueur comme les risers. C'est aussi malheureusement un paramètre encore insuffisamment connu.

Enfin la plupart des données expérimentales utilisées, par exemple pour obtenir le coefficient de portance en fonction de U_R et A/D , ont été obtenues en écoulements subcritiques, sur des cylindres de petits diamètres. Un riser de 50 centimètres de diamètre dans un courant de 1 m/s tombe en plein dans le régime critique. Une plateforme SPAR (mono-colonne) de 10 mètres de diamètre dans le régime transcritique. On ne sait pas dans quelle mesure les coefficients hydrodynamiques obtenus en régime subcritique sont applicables à ces régimes d'écoulements.

4.5.2 Réduction des vibrations induites

Les vibrations induites par le détachement tourbillonnaire sont préjudiciables généralement par la fatigue qu'elles entraînent de la structure. A ce titre, pour les risers, les sollicitations dues aux modes d'ordre élevé sont les plus dommageables puisque, à amplitude de vibration constante (de l'ordre du diamètre), la courbure, donc les contraintes, sont plus importantes et que le nombre de cycles croît avec la fréquence de vibration. L'augmentation de la traînée peut aussi être pénalisante, par exemple les efforts d'ancrage sur une plate-forme mono-colonne (SPAR) peuvent être fortement accrus.

Le meilleur moyen d'éliminer les vibrations induites est d'éviter que les vitesses réduites associées aux modes critiques de vibration prennent des valeurs mal placées, entre 4 et 8 (ou plus, pour de faibles masses réduites). Cela peut signifier de modifier la raideur structurelle, ou la distribution de masses. Ce remède n'est guère applicable aux structures comme les risers qui présentent plusieurs modes de vibration.

Une autre solution est d'augmenter la dissipation d'énergie, en jouant soit sur l'amortissement structurel, soit sur l'amortissement hydrodynamique. Par exemple des structures comme les conduites flexibles sont réputées peu enclines aux vibrations induites, le frottement des différentes couches constitutives dissipant beaucoup d'énergie.

Enfin on peut chercher à agir sur la source même du problème, en supprimant ou diminuant l'excitation. Les dispositifs «anti-VIV» présentés ci-après cherchent principalement à agir suivant ce principe.

Les dispositifs anti-VIV

Un dispositif bien connu, et souvent visible sur les cheminées, consiste à enrayer en hélice, autour du cylindre, une ou plusieurs plaques de faible largeur. Typiquement 3 hélices (en anglais *strakes*) sont installées, larges d'environ un dixième de diamètre, et avec un pas de 5 à 10 diamètres. L'efficacité de ce système tient à ce qu'il combine plusieurs effets : en imposant les points de séparation (aux angles vifs) il diminue la portance ; en les imposant à des positions angulaires variables le long du cylindre il détruit la cohérence du sillage et diminue la longueur de corrélation ; enfin l'amortissement hydrodynamique se trouve augmenté. Un autre avantage est que le système est efficace quelle que soit la direction du courant.

L'inconvénient, outre les problèmes de manutention et d'installation, est un accroissement sensible du coefficient de traînée, qui monte à 1,4, même en régime transcritique.

De nombreux dispositifs peuvent être considérés comme parents des hélices. Par exemple les plaques peuvent être remplacées par des câbles ou des fils, ou réalisées de manière discontinue par des petits éléments parallèles à la génératrice du cylindre.

On peut aussi en varier le pas, jusqu'au cas extrême où il devient infini, les plaques étant parallèles à la génératrice. L'efficacité dépend alors du nombre et de l'emplacement des plaques, vis à vis de la direction de l'écoulement incident. Le dispositif perd donc son aspect omnidirectionnel. Il ne permet plus d'agir sur la longueur de corrélation. Zdravkovich présente une compilation de différentes variantes et rapporte que certaines sont inefficaces, voire néfastes (fig. 4.35).

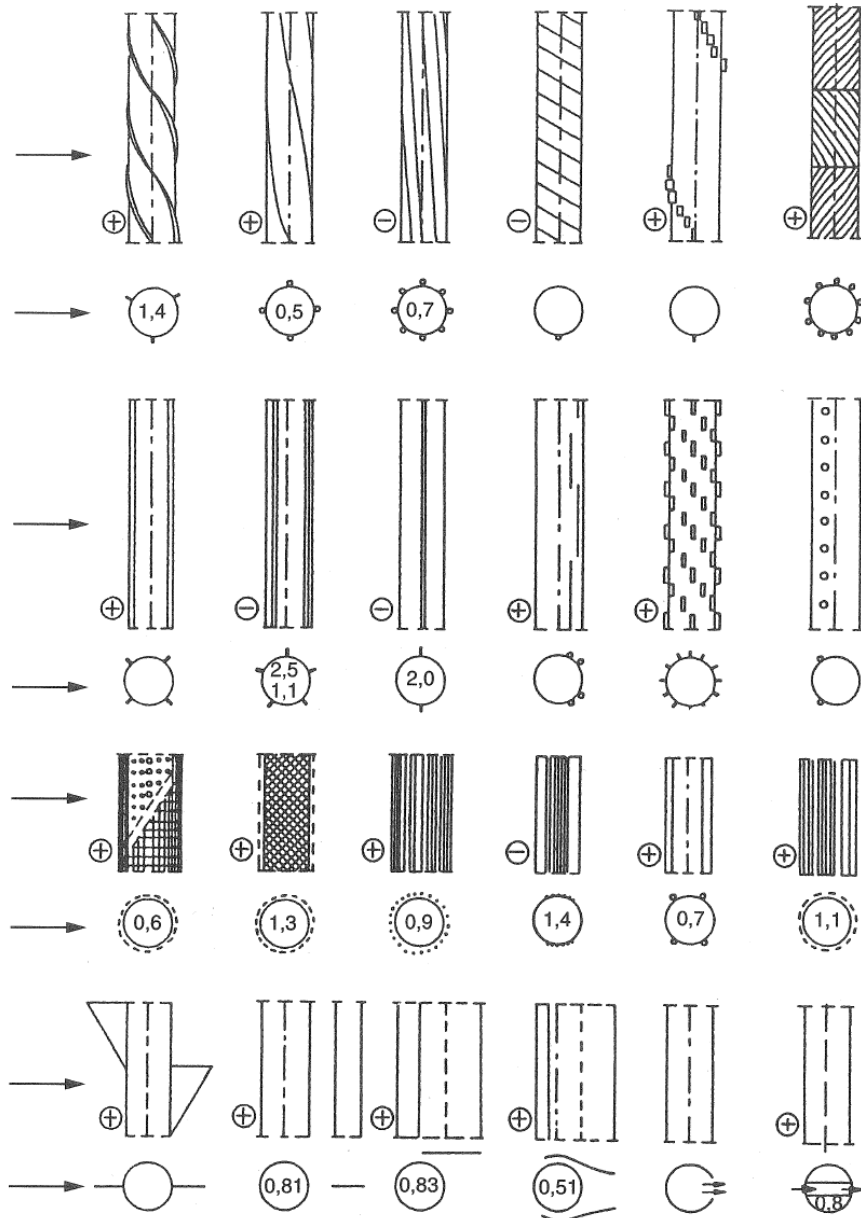


FIG. 4.35 – Quelques systèmes réducteurs des vibrations induites. Le signe + signifie que le système est efficace, le signe – qu'il ne l'est pas. Le nombre inscrit dans le cercle est le coefficient de traînée.

Un autre principe est de gagner le cylindre d'un deuxième tuyau présentant de nombreuses ouvertures, souvent dénommé «bouclier» perforé (en anglais *shroud*). L'écoulement, par son passage à travers les perforations du bouclier, se trouve en quelque sorte régularisé, le sillage devient homogène et l'apparition de l'allée alternée est décalée plus loin vers l'aval. Typique-

ment le diamètre du bouclier est supérieur de 25 % à celui du cylindre, le taux de porosité est compris entre 30 et 40 %. La forme et la dimension des perforations jouent un rôle moindre. Des coefficients de traînée, basés sur le diamètre du bouclier, de l'ordre de 0,6 ou 0,7 (soit donc 0,75 à 0,9 basés sur le diamètre du cylindre), sont rapportés dans la littérature. L'efficacité paraît être aussi bonne que celle offerte par les systèmes en hélice.

En ce qui concerne les câbles de remorquage, il est fréquent de recourir à des rubans, ancrés entre les torons, qui, d'une part bloquent la communication entre les écoulements d'un côté et de l'autre du câble, et d'autre part augmentent l'amortissement hydrodynamique. Un intérêt du système est qu'il est compatible avec les opérations d'enroulement et de déroulement du câble.

On peut aussi tirer parti de la nécessité d'incorporer au riser des connecteurs, ou éléments de flottabilité, et jouer sur les variations de diamètre. On limite ainsi la longueur de corrélation, et on assure la présence de zones dissipatrices d'énergie, dans la mesure où l'excitation ne peut prendre lieu à la fois sur les parties riser et sur les parties flotteurs. Cela suppose que les diamètres soient suffisamment différents.

Il existe de nombreux autres systèmes, consistant par exemple à habiller le cylindre d'un carénage, ou à régulariser localement l'écoulement par des guides, ou à bloquer la communication de l'écoulement dans le sillage par une plaque fixe, etc., qui ont l'inconvénient de ne fonctionner que pour une seule direction de l'écoulement incident. Ils ne sont donc guère applicables aux systèmes offshore.

4.5.3 Instabilités in-line

On a relaté au paragraphe 4.4.1 que, pour des cylindres en mouvement sinusoïdal dans la direction du courant, des coefficients de traînée négatifs étaient obtenus expérimentalement pour certaines valeurs (faibles) de l'amplitude relative A/D et du paramètre $U_0 T/D$, U_0 étant la vitesse du courant et T la période d'oscillation (figure 4.24). Le cylindre extrait alors de l'énergie de l'écoulement fluide.

Pour un cylindre sur appui élastique dans un écoulement, on en déduit que des instabilités in-line sont susceptibles d'apparaître pour des valeurs correspondantes de la vitesse réduite $U_0/(f_n D)$. On observe deux zones d'instabilité :

- une première zone pour des vitesses réduites comprises entre (grossièrement) 2 et 3, où le lâcher tourbillonnaire reste alterné. Que les vitesses réduites valent alors la moitié de celles où apparaissent les vibrations transverses est logique puisque la fréquence de fluctuation de l'effort in-line est double de celle de la portance.

- une deuxième zone pour des vitesses réduites plus faibles, entre 1 et 2, où le lâcher tourbillonnaire devient symétrique (fig. 4.36).

Dans les deux cas la réponse vibratoire est faible et ne dépasse pas 10 à 20 % du diamètre. Une autre différence avec les vibrations transverses est que les vibrations in-line sont plus facilement éliminées par un accroissement de l'amortissement du système.

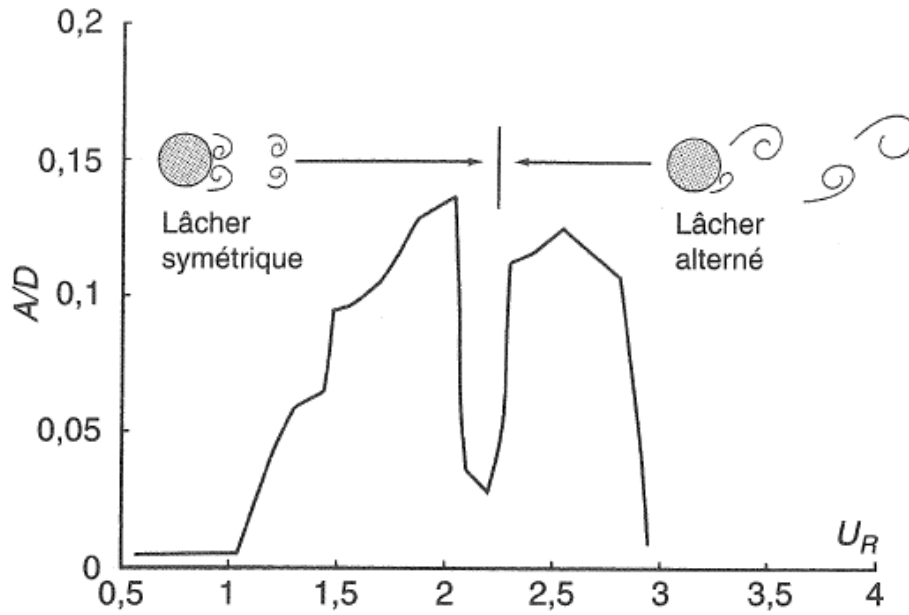


FIG. 4.36 – Zones d'apparition des instabilités in-line.

4.5.4 Le galop

Le galop est un autre type d'instabilité qui apparaît à des plus grandes valeurs de la vitesse réduite que les vibrations induites par le détachement tourbillonnaire. Il ne se produit que pour des géométries particulières, le cas le plus connu étant celui du carré.

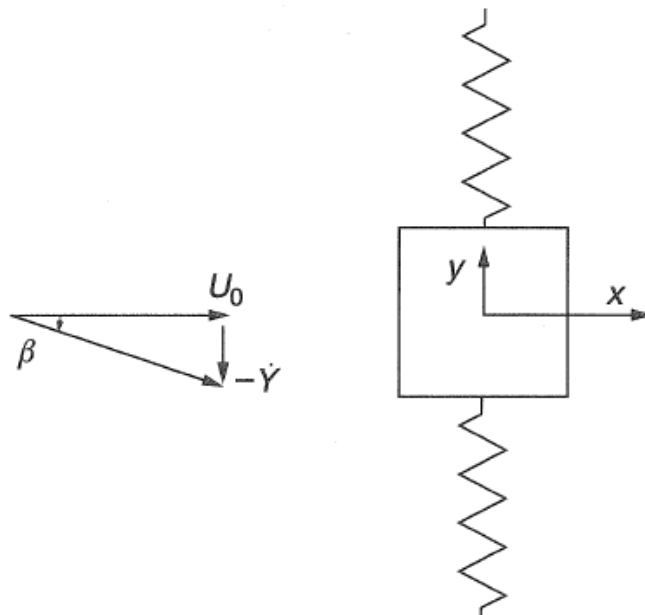


FIG. 4.37 – Cylindre de section carrée sur appuis élastiques.

On considère donc le système représenté figure 4.37, où seul le mouvement transverse (suivant y) du carré est autorisé, le courant, de vitesse U_0 , étant dirigé suivant l'axe x .

L'hypothèse essentielle dans l'analyse du galop est que les efforts dus au courant, sur le carré en mouvement transverse à la vitesse \dot{Y} , peuvent se formuler de manière quasi-statique, c'est à dire que les efforts de traînée sont les mêmes que si le carré était immobile, et soumis à un écoulement de vitesse $\sqrt{U_0^2 + \dot{Y}^2}$ et d'incidence $\beta = -\arctan(\dot{Y}/U_0)$. Cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée que la vitesse réduite $U_R = U_0 T/D$ est élevée, T étant la période d'oscillation et D le côté du carré. On suppose connu l'effort transverse alors ressenti par le carré et on l'exprime classiquement sous la forme :

$$F_Y = \frac{1}{2} \rho C_Y(\beta) D (U_0^2 + \dot{Y}^2) \quad (4.44)$$

L'équation du mouvement transverse s'écrit alors :

$$(M + M_a) \ddot{Y} + 2\zeta \omega (M + M_a) \dot{Y} + K Y = \frac{1}{2} \rho C_Y(\beta) D (U_0^2 + \dot{Y}^2) \quad (4.45)$$

soit, si $|\dot{Y}|$ est petit devant U_0 , par développement de Taylor du second membre au voisinage de $\beta = 0$:

$$(M + M_a) \ddot{Y} + \left[2\zeta \omega (M + M_a) + \frac{1}{2} \rho C'_Y(0) D U_0 \right] \dot{Y} + K Y = 0 \quad (4.46)$$

d'où on déduit que l'instabilité apparaît si le terme d'amortissement est négatif, soit si :

$$C'_Y(0) < -\frac{4\zeta \omega (M + M_a)}{\rho D U_0} \quad (4.47)$$

$$C'_Y(0) < -2 \frac{K_S}{U_R} \quad (4.48)$$

K_S étant le paramètre de stabilité ou nombre de Scruton.

On en conclut que, pour peu que $C'_Y(0)$ soit négatif, l'instabilité se déclenche forcément au-delà d'une certaine valeur de la vitesse réduite. De l'inégalité (4.48) On tire aussi la conclusion que, dans un plan $[K_S, U_R]$, la limite entre les zones stable et instable est voisine d'une droite (fig. 4.38).

Dans le cas du cylindre circulaire, l'effort de traînée est dirigé dans le sens de l'écoulement, d'où l'on déduit que $C'_Y(0)$ est égal au coefficient de traînée C_D et donc strictement positif: le galop ne peut pas apparaître.

Pour le carré on se trouve dans la situation où, l'écoulement étant légèrement en incidence, l'effort transverse est dirigé «dans le mauvais sens», le carré étant attiré du côté d'où provient le courant.

La détermination de l'amplitude du galop requiert la connaissance du coefficient $C_Y(\beta)$ en fonction de l'incidence, au moins jusqu'à des angles β tels qu'il redevienne positif. L'amplitude du galop se relie alors à la valeur de β telle que sur un cycle d'oscillation la production et la dissipation d'énergie s'équilibrent. Il s'ensuit que cette amplitude croît de façon linéaire avec la vitesse du courant. Au contraire des vibrations induites par le détachement tourbillonnaire, le galop n'est pas borné et son apparition peut avoir des conséquences très dommageables.

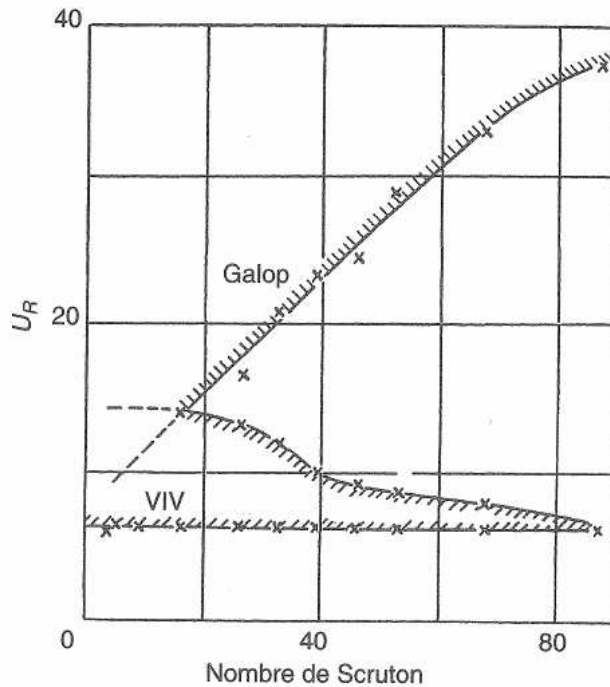


FIG. 4.38 – *Forme carrée dans un écoulement. Zones d'apparition des instabilités induites par le détachement tourbillonnaire, et du galop.*

Le galop des formes rectangulaires a été beaucoup étudié en aérodynamique. Il se produit pour des allongements (rapport longueur sur largeur) compris entre 0,75 et 3.

En offshore pétrolier, des risques de galop ont été suggérés pour les configurations de multi-tubes, en particulier le cas d'un gros cylindre gainé de plus petits. En ce qui concerne les pétroliers ancrés, l'allure du coefficient de traînée longitudinale en fonction de l'incidence du courant, donné par l'OCIMF, suggère la possibilité de galop, par courant de travers.

4.6 La formule de Morison généralisée

Les paragraphes précédents ont permis au lecteur de prendre conscience que la formule de Morison exprime très imparfaitement la réalité physique. C'est là un point que l'on a rapidement tendance à oublier dans les applications pratiques.

Pour des éléments tubulaires tels que les barres de jacket ou les risers, la formule de Morison est appliquée dans le cadre d'une théorie des tranches, où l'on néglige généralement la composante axiale de l'écoulement.

La première étape est de déterminer les composantes (u, v, w) de la vitesse (locale) de l'écoulement incident (induit par la houle et le courant), celles $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ de son accélération eulérienne, et de même les composantes $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ de la vitesse (locale) de la barre, et celles $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ de son accélération. On projette alors ces vecteurs sur les axes XYZ d'un repère local lié à la tranche, Z coïncidant avec la direction axiale. Les composantes du vecteur vitesse incidente sont alors (U, V, W) , celles de la vitesse propre de la tranche $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$, etc.

On néglige habituellement les efforts axiaux devant les efforts transverses.

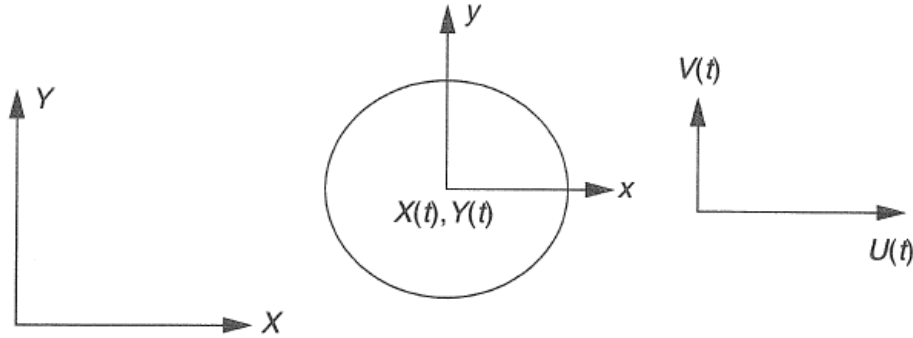


FIG. 4.39 – Coordonnées $(X(t), Y(t))$ du centre du cylindre, et vitesse $(U(t), V(t))$ de l'écoulement dans le plan de la tranche.

Les efforts sur la tranche s'obtiennent alors par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dF_X \\ dF_Y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \rho C_D D \begin{pmatrix} U - \dot{X} \\ V - \dot{Y} \end{pmatrix} \sqrt{(U - \dot{X})^2 + (V - \dot{Y})^2} dL \\ &+ \left\{ \rho(1 + C_m) \pi \frac{D^2}{4} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} - \rho C_m \pi \frac{D^2}{4} \begin{pmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} \right\} dL \end{aligned} \quad (4.49)$$

On peut alors repasser au repère fixe pour exprimer les composantes (df_x, df_y, df_z) de l'effort hydrodynamique.

Le problème qui se pose est celui du choix des coefficients C_m et C_D (et aussi accessoirement du diamètre D , qu'il peut être nécessaire d'augmenter pour tenir compte des accrétions de coquillages ou d'algues). Les règlements imposent en général des valeurs minimales, par exemple $C_m = 1$ ($C_M = 2$) et $C_D = 0,6$ ou $0,7$ pour un cylindre lisse à grand Reynolds.

Linéarisation du terme de traînée

Le terme de traînée, en $U|U|$, se prête mal à certains types de calcul, par exemple dans le domaine fréquentiel.

Dans le cas où U est périodique : $U = u \sin \omega t$, on a déjà vu que l'on pouvait appliquer le développement :

$$\sin \omega t |\sin \omega t| = \frac{8}{3\pi} \sin \omega t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)\pi} \sin(2n+1)\omega t \quad (4.50)$$

et se limiter au premier terme.

Ainsi, si vitesse incidente $U(t)$ et réponse $X(t)$ sont exprimés sous la forme :

$$U(t) = \Re \{ u e^{-i\omega t} \} \quad X(t) = \Re \{ x e^{-i\omega t} \}$$

u et x étant complexes, on écrit $(U - \dot{X}) |U - \dot{X}|$ sous la forme :

$$(U - \dot{X}) |U - \dot{X}| \simeq \frac{8}{3\pi} \|u + i\omega x\| \Re \{(u + i\omega x) e^{-i\omega t}\} \quad (4.51)$$

$\| \cdot \|$ désignant le module du nombre complexe.

Si le mouvement $X(t)$ n'est pas connu, on aura souvent intérêt à procéder par itération en écrivant, à l'itération n :

$$(U - \dot{X}) |U - \dot{X}|^{(n)} \simeq \frac{8}{3\pi} \|u + i\omega x^{(n-1)}\| \Re \{(u + i\omega x^{(n)}) e^{-i\omega t}\} \quad (4.52)$$

qui permet, à chaque étape, de résoudre un problème linéaire.

Ce schéma converge habituellement en quelques itérations.

Dans le cas où U est une variable aléatoire gaussienne et centrée (chargement sous houle irrégulière), on peut chercher une forme équivalente du type :

$$U |U| \simeq \lambda \sigma_U U \quad (4.53)$$

où σ_U désigne l'écart type.

En tirant parti du fait que U est gaussien et en minimisant l'écart entre les deux membres on obtient $\lambda = \sqrt{8/\pi}$. C'est aussi la valeur qui assure la même dissipation d'énergie.

Moyennant cette linéarisation, il est possible de travailler dans le domaine fréquentiel et de calculer le spectre des efforts s'appliquant sur un élément de barre ou sur une structure complète. Si le mouvement est à déterminer, on peut suivre un schéma itératif équivalent à celui proposé ci-dessus :

$$(U - \dot{X}) |U - \dot{X}|^{(n)} \simeq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{U-\dot{X}}^{(n-1)} (U - \dot{X}^{(n)}) \quad (4.54)$$

l'écart type étant déterminé à partir de la fonction de transfert du processus $U(t) - \dot{X}^{(n-1)}(t)$ et du spectre de houle (voir le paragraphe 5.5).

On doit être conscient cependant qu'appliquer ce type d'approximation revient à représenter un signal non gaussien ($U |U|$) par un signal gaussien. Comme le montre la figure 4.40, les extrema des deux processus sont très différents. Cette procédure n'est donc pas applicable, par exemple, à la prédiction des efforts extrêmes sur un cylindre fixe. Elle l'est davantage au calcul de la réponse sur houle, lorsque le terme de traînée représente la dissipation d'énergie qui vient limiter la résonance.

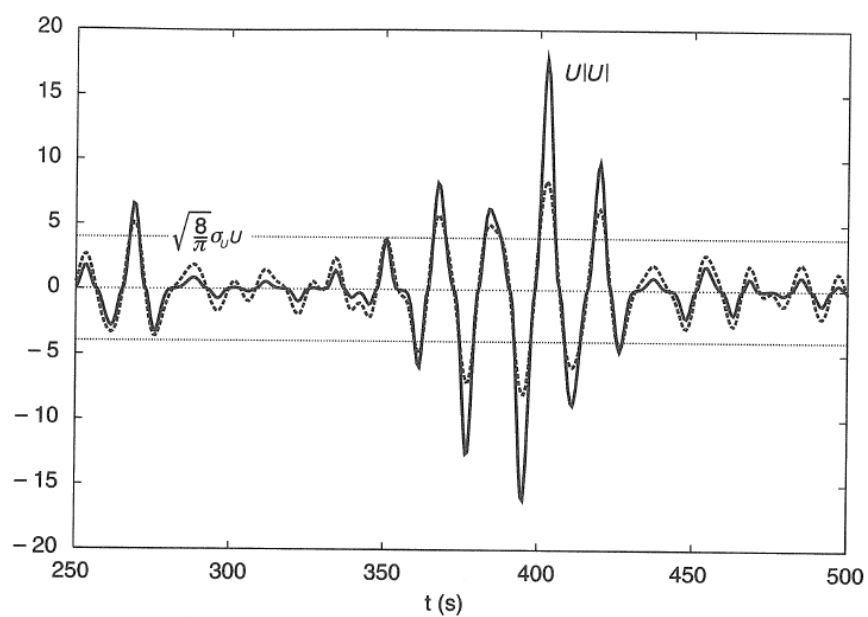


FIG. 4.40 – Comparaison, pour une variable aléatoire gaussienne $u(t)$, des signaux u $|u|$ (traits continus) et $\sqrt{8/\pi} \sigma_u u$ (tirets). Les pointillés horizontaux correspondent à $u = \pm\sqrt{8/\pi} \sigma_u$.

Chapitre 5

LES GRANDS CORPS : THEORIE LINEAIRE

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à des structures, fixes ou flottantes, telles que les effets visqueux (frottement, traînée) soient négligeables en première approximation. Ce sont donc des structures de grandes dimensions devant l'amplitude de la houle et devant les amplitudes de leurs mouvements propres. Par ailleurs on les suppose au point fixe (pas de vitesse d'avance); on suppose nulle également la vitesse d'un courant éventuel. Cette simplification est acceptable tant que le paramètre $\tau = U_C \omega/g$ (le nombre de Brard) est «suffisamment petit» par rapport à la valeur critique $\tau_C = 1/4$. Pour une vitesse de courant U_C de 1 m/s et une période de houle de 12 secondes, τ vaut 0,053 : les efforts de diffraction et la réponse linéaire à la houle sont pratiquement identiques, que le courant soit nul ou égal à 1 m/s.

Il est possible d'inclure le courant (ou une faible vitesse d'avance) dans la théorie linéarisée de la diffraction-radiation, mais au prix d'une augmentation de la complexité du modèle théorique, qui ne se justifie pas lorsqu'on s'intéresse aux seuls efforts et mouvements. Par contre, le courant a un effet non négligeable sur les surélévations de surface libre et, surtout, sur les efforts de dérive qui sont étudiés au chapitre suivant. C'est donc au chapitre 6 que l'on aborde brièvement le problème de la diffraction-radiation avec courant.

Le cadre mathématique utilisé pour la description de la cinématique fluide est donc, tout naturellement, la théorie potentielle que l'on a suivie au chapitre 3 pour modéliser la houle. Le problème aux limites satisfait par le potentiel des vitesses est identique, à la différence qu'il convient d'y rajouter deux conditions supplémentaires :

- une condition de glissement sur la carène :

$$\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad (5.1)$$

\vec{n} étant le vecteur normal à la carène, et \vec{U} la vitesse (locale) de la carène ;

- une condition de disparition à l'infini des perturbations de l'écoulement incident dues à la présence de la structure (en trois dimensions ; en deux dimensions, on écrit que les ondes de perturbation se propagent vers les infinis amont et aval). Cette condition est nécessaire mathématiquement lorsqu'on résout le problème dans le domaine fréquentiel, pour éliminer des solutions non physiques.

Il convient par ailleurs de coupler à ce problème fluide les équations décrivant le mouvement de la structure, inconnu a priori.

Dans ce chapitre on se place, d'entrée, dans une approche de linéarisation. Pour la houle seule, on a vu que cela voulait dire que les conditions de surface libre sont affichées, non sur sa position instantanée, mais sur sa position moyenne (au repos), et que les termes non linéaires en sont éliminés. Le grand avantage de cette simplification du problème est qu'elle permet de travailler dans un domaine fluide invariable.

Dans le cas d'une structure flottante le même problème se pose avec la condition de glissement sur la carène, affichée sur une surface mobile et de position inconnue a priori. Il est cohérent de supposer que la structure effectue de petits mouvements autour d'une position moyenne invariable, de telle façon que l'on puisse afficher la condition de glissement sur la position moyenne de la carène :

$$\nabla\Phi(P_0,t) \cdot \vec{n}_0 = \vec{U}(P_0,t) \cdot \vec{n}_0 \quad (5.2)$$

Les mouvements de rotation (roulis, tangage, lacet) étant supposés petits, on peut les exprimer par rapport à des axes de directions **fixes**. Les équations du mouvement angulaire de la structure s'expriment alors simplement. Pour cela on introduit un repère $GXYZ$ lié à la structure, centré au centre de gravité G , et tel qu'au repos (on suppose que position au repos et position moyenne coïncident à un écart près d'ordre ε^2) $GXYZ$ se déduise du repère fixe $Oxyz$ par une translation verticale \vec{OG}_0 ($Oxyz$ étant le repère utilisé pour décrire la cinématique fluide).

Le mouvement dans G_0xyz d'un point P lié à la structure, et de coordonnées X,Y,Z dans $GXYZ$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

x_G, y_G, z_G désignant le mouvement de G dans G_0xyz et α, β, γ étant les angles de rotation par rapport à G_0x, G_0y et G_0z .

Pour désigner ces degrés de liberté on utilise les mêmes appellations que dans le domaine naval. Elles sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Degré de liberté	Dynamique		Statique	
	Français	Anglais	Français	Anglais
Translation suivant x	Cavalement	<i>Surge</i>		
Translation suivant y	Embardée	<i>Sway</i>		
Translation suivant z	Pilonnement	<i>Heave</i>	Enfoncement	<i>Squat</i>
Rotation autour de x	Roulis	<i>Roll</i>	Gîte	<i>Heel</i>
Rotation autour de y	Tangage	<i>Pitch</i>	Assiette	<i>Trim</i>
Rotation autour de z	Lacet	<i>Yaw</i>	Cap	<i>Heading</i>

Tableau 5.1. Les degrés de liberté d'une structure flottante

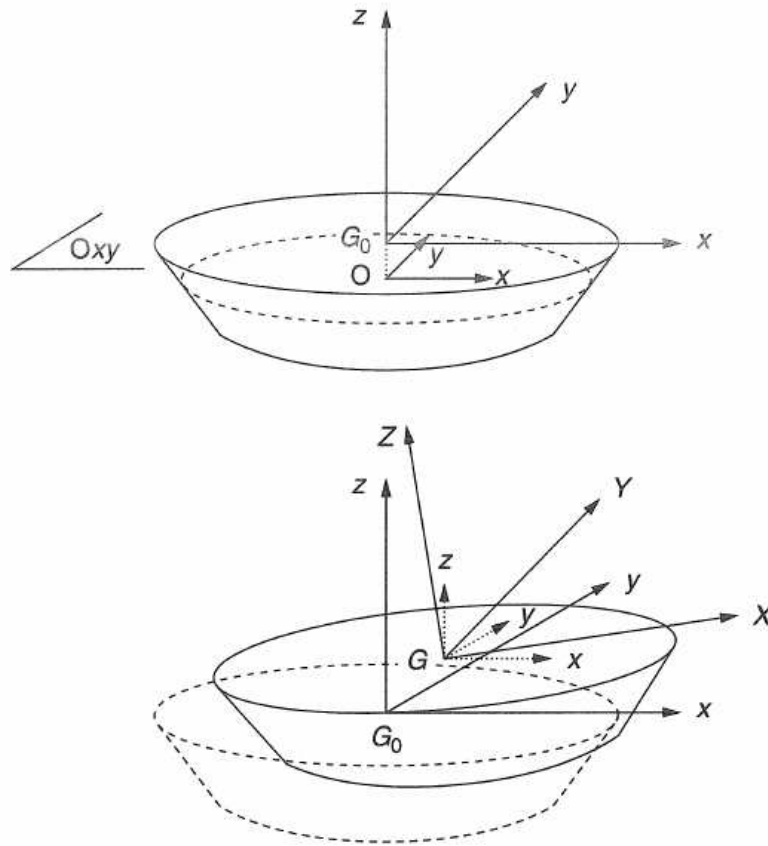


FIG. 5.1 – Définition des repères.

La condition de glissement linéarisée (5.2) s'explique en :

$$\begin{aligned} \nabla\Phi \cdot \vec{n}_0 &= \left[\begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{z}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} n_{0x} \\ n_{0y} \\ n_{0z} \end{pmatrix} \\ \nabla\Phi \cdot \vec{n}_0 &= \begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{z}_G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{0x} \\ n_{0y} \\ n_{0z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} n_{0x} \\ n_{0y} \\ n_{0z} \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

En ce qui concerne les équations du mouvement, elles prennent la forme :

$$M \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \vec{F} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{I} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \vec{C} \quad (5.6)$$

où M désigne la masse propre de la structure, \mathbf{I} sa matrice d'inertie, et (\vec{F}, \vec{C}) le torseur des efforts extérieurs exprimé dans $Gxyz$.

Parmi ces efforts extérieurs, la réaction du fluide s'obtient par intégration de la pression sur la carène S_C :

$$\vec{F}_H = \iint_{S_C} p \vec{n} \, dS \quad (5.7)$$

$$\vec{C}_H = \iint_{S_C} p \overrightarrow{GP} \wedge \vec{n} \, dS \quad (5.8)$$

où P désigne le point courant sur la carène, \vec{n} la normale intérieure à la carène et où la pression p s'obtient par la relation de Bernoulli :

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \Phi_t - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 \quad (5.9)$$

la cote z étant référencée par rapport au plan de surface libre au repos Oxy .

Dans le cadre d'une théorie linéarisée il est toujours cohérent de ne retenir que les termes d'ordre un des efforts hydrodynamiques en écrivant :

$$- \iint_{S_C} \rho \left(\Phi_t(P,t) + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2(P,t) \right) \vec{n} \, dS \simeq - \iint_{S_{C_0}} \rho \Phi_t(P_0,t) \vec{n}_0 \, dS \quad (5.10)$$

$$- \iint_{S_C} \rho \left(\Phi_t(P,t) + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2(P,t) \right) \overrightarrow{GP} \wedge \vec{n} \, dS \simeq - \iint_{S_{C_0}} \rho \Phi_t(P_0,t) \overrightarrow{G_0P_0} \wedge \vec{n}_0 \, dS \quad (5.11)$$

où l'indice $_0$ fait référence à la position au repos.

La composante hydrostatique $-\rho g z$ de la pression doit être traitée différemment. Elle n'est d'ordre 1 (en ε) que localement, à la surface libre. On ne peut donc confondre position instantanée de la carène et position moyenne, pour le calcul des efforts qui en résultent. Ceux-ci s'expriment, toujours dans le cadre d'une théorie linéarisée, à partir de la matrice des raideurs hydrostatiques \mathbf{K}_H .

Bilan

Introduisant les vecteurs et matrices généralisés :

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_G(t) \\ y_G(t) \\ z_G(t) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \quad \vec{N}_0 = \begin{pmatrix} n_{0x} \\ n_{0y} \\ n_{0z} \\ Y n_{0z} - Z n_{0y} \\ Z n_{0x} - X n_{0z} \\ X n_{0y} - Y n_{0x} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{44} & I_{45} & I_{46} \\ 0 & 0 & 0 & I_{45} & I_{55} & I_{56} \\ 0 & 0 & 0 & I_{46} & I_{56} & I_{66} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{K}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & K_{44} & K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & K_{35} & K_{45} & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

et supposant que les autres efforts extérieurs se réduisent au rappel (lui aussi linéarisé) de l'ancrage, on met l'équation du mouvement sous la forme :

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \vec{X}(t)}{dt^2} + (\mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \vec{X}(t) = -\rho \iint_{S_{C_0}} \Phi_t(P_0, t) \vec{N}_0 dS \quad (5.15)$$

où \mathbf{K}_A désigne la matrice (6×6) des raideurs d'ancrage.

5.2 Réponse linéaire sur houle régulière

Les équations du problème étant linéaires, il est naturel d'en aborder la résolution dans le domaine fréquentiel, soit donc de supposer que la houle incidente est une houle régulière (Airy) de pulsation ω .

On passe alors en variables complexes en écrivant :

$$\Phi(x, y, z, t) = \Re \{ \varphi(x, y, z) e^{-i\omega t} \} \quad (5.16)$$

$$\vec{X}(t) = \Re \{ \vec{x} e^{-i\omega t} \} \quad (5.17)$$

L'équation du mouvement prend la forme :

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A) \vec{x} = i\omega\rho \iint_{S_{C_0}} \varphi \vec{N}_0 dS \quad (5.18)$$

La linéarité du problème conduit à décomposer le potentiel complexe en trois composantes :

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_D + \varphi_R \quad (5.19)$$

où :

- φ_I est le potentiel de la houle incidente (Airy) :

$$\varphi_I(x, y, z, t) = -i \frac{Ag}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (5.20)$$

β étant l'angle de propagation par rapport à l'axe Ox .

• φ_D est le potentiel de la houle diffractée par le corps supposé fixe (potentiel de diffraction). Il vérifie la condition de glissement sur la carène :

$$\nabla\varphi_D \cdot \vec{n}_0 = -\nabla\varphi_I \cdot \vec{n}_0 \quad (5.21)$$

• φ_R est le potentiel de radiation, dû au seul mouvement du corps en l'absence de houle incidente :

$$\varphi_R = \sum_{j=1}^6 -i\omega x_j \varphi_{Rj} \quad (5.22)$$

où x_j désigne la j -ème composante du mouvement \vec{x} de la structure.

La condition de glissement (5.4) sur la carène est alors vérifiée dès lors que les potentiels élémentaires φ_{Rj} y satisfont :

$$\nabla\varphi_{Rj} \cdot \vec{n}_0 = N_{0j} \quad (5.23)$$

où N_{0j} est la j -ème composante du vecteur normal généralisé \vec{N}_0 .

La contribution de φ_R aux efforts hydrodynamiques s'exprime linéairement en fonction du mouvement, via les matrices de masses-inerties ajoutées et d'amortissements de radiation :

$$i\omega \rho \iint_{S_{C_0}} \varphi_R \vec{N}_0 dS = \left[\mathbf{M}_a(\omega) \omega^2 + i \mathbf{B}(\omega) \omega \right] \vec{x} \quad (5.24)$$

De telle façon que l'équation du mouvement prend la forme finale :

$$\left[-\left(\mathbf{M} + \mathbf{M}_a(\omega) \right) \omega^2 - i \mathbf{B}(\omega) \omega + \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A \right] \vec{x} = i\omega \rho \iint_{S_{C_0}} (\varphi_I + \varphi_D) \vec{N}_0 dS \quad (5.25)$$

Sa résolution ne pose pas de difficulté dès lors que l'on a déterminé les masses ajoutées, les amortissements, et le deuxième membre : les **efforts d'excitation**¹.

Une approximation quelquefois utilisée consiste à ne retenir, dans les efforts excitateurs, que la composante due au potentiel incident φ_I . On parle alors d'efforts de **Froude-Krylov**. Cette approximation peut être en erreur de plus de 50 %.

5.2.1 Périodes propres

Du premier membre de cette équation on peut tirer les pulsations propres en annulant le déterminant de :

$$-\left(\mathbf{M} + \mathbf{M}_a(\omega) \right) \omega^2 + \mathbf{K}_H + \mathbf{K}_A$$

(les amortissements étant habituellement négligeables pour ce calcul).

Les masses ajoutées dépendant de la pulsation, le calcul n'est exact pour le degré de liberté j que si la pulsation propre obtenue ω_{rj} est peu différente de celle pour laquelle les masses ajoutées ont été calculées. A noter qu'une erreur de 20 % sur les masses ajoutées n'introduit guère en général qu'une erreur de 5 % sur les périodes propres.

La figure 5.2 illustre graphiquement la détermination de la pulsation propre en pilonnement d'une barge de section rectangulaire (de largeur 60 m et tirant d'eau 20 m). On y a

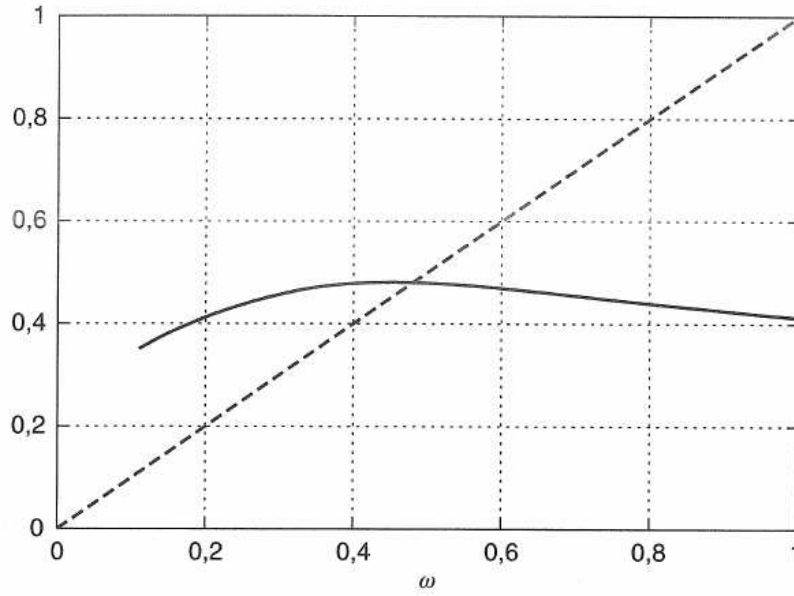


FIG. 5.2 – Détermination graphique de la pulsation propre en pilonnement d'une barge.

tracé les deux courbes $y = \sqrt{K_{H33}/(M + M_{a33}(\omega))}$ et $y = \omega$. Leur intersection donne la pulsation propre.

Le calcul des périodes propres est un étape essentielle de la conception d'un système offshore. En particulier il importe de les situer vis à vis des périodes des houles de design.

5.2.2 Le problème numérique de diffraction-radiation

Le potentiel de diffraction φ_D et les 6 potentiels de radiation φ_{Rj} sont solutions du même problème aux limites :

$$\begin{array}{ll}
 \Delta\varphi = 0 & \text{dans le domaine fluide} \\
 \nabla\varphi \cdot \vec{n}_0 = f_j & \text{sur la carène } S_{C_0} \\
 \varphi_z = 0 & \text{sur le fond } z = -h \\
 g\varphi_z - \omega^2\varphi = 0 & \text{sur la surface libre au repos } z = 0 \\
 \text{Rad}(\varphi) & x^2 + y^2 \rightarrow \infty
 \end{array} \tag{5.26}$$

où, pour la diffraction :

$$f_0 = -\nabla\varphi_I \cdot \vec{n}_0 \tag{5.27}$$

et, pour la radiation :

$$f_j = N_{0j} \tag{5.28}$$

N_{0j} étant la j -ème composante de la normale généralisée.

1. On écrit aussi souvent : **efforts de diffraction**, terminologie source d'ambiguïté dans la mesure où, pour certains, les efforts de diffraction correspondent à la contribution de φ_D seul.

La condition de radiation est souvent écrite sous la forme dite de Sommerfeld :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - ik \varphi \right) = 0 \quad (5.29)$$

où R est la distance radiale $\sqrt{x^2 + y^2}$. Cette condition exprime que, au loin, les ondes de diffraction-radiation se propagent dans la direction radiale, ont pour nombre d'onde k , et ont une amplitude qui décroît comme $1/\sqrt{R}$. De manière asymptotique le potentiel de diffraction par exemple s'écrit :

$$\varphi_D = -i \frac{A g \operatorname{ch} k(z+h)}{\omega \operatorname{ch} kh} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} H_D(\theta) e^{ikR - i\pi/4} + O(R^{-1}) \quad (5.30)$$

La fonction de répartition angulaire $H_D(\theta)$ est la fonction dite de Kochin. On peut de même déterminer les fonctions de Kochin relatives à chaque potentiel de radiation. Une fois les équations du mouvement résolues, la combinaison des 7 fonctions de Kochin élémentaires permet de restituer le comportement lointain du potentiel. Une application est le calcul des efforts de dérive (cf. le paragraphe 6.2.3).

Une fois les potentiels élémentaires φ_{Rj} déterminés, les différents termes des matrices de masses-inerties ajoutées et amortissements de radiation s'obtiennent par :

$$\left[\mathbf{M}_a(\omega) + i \frac{\mathbf{B}(\omega)}{\omega} \right]_{jk} = \rho \iint_{S_{C_0}} \varphi_{Rk} \frac{\partial \varphi_{Rj}}{\partial n_0} dS \quad (5.31)$$

d'où l'on déduit, par la deuxième identité de Green, que ces matrices sont symétriques :

$$M_{ajk}(\omega) = M_{akj}(\omega) \quad B_{jk}(\omega) = B_{kj}(\omega) \quad (5.32)$$

Physiquement $\Re\{[M_{ajk}(\omega) \omega^2 x_k + i B_{jk}(\omega) \omega x_k] \exp(-i\omega t)\}$ représente l'effort ressenti suivant le degré de liberté j lorsque la structure effectue des oscillations forcées d'amplitude x_k et de pulsation ω suivant le degré de liberté k . Si elle présente une symétrie babord-tribord, un mouvement forcé en cavalement, pilonnement ou tangage n'entraîne aucun effort en embardée, ni en roulis, ni en lacet. On en déduit que les termes d'indices 21, 41, 61, 23, 43, 63, 25, 45, 65, sont nuls, et, par la symétrie des matrices, les termes d'indices inversés. En pratique les couplages importants sont ceux entre embardée et roulis d'une part, cavalement et tangage d'autre part, tous les autres termes non diagonaux étant nuls s'il y a deux plans de symétrie (babord-tribord et avant-arrière).

Représentant une dissipation d'énergie via le champ de vagues rayonné, les termes diagonaux B_{jj} de la matrice d'amortissement sont positifs. Ils sont nuls asymptotiquement lorsque la pulsation ω tend vers zéro (la surface libre équivaut alors à un plan rigide) ou lorsque elle tend vers l'infini (le mouvement est alors trop «rapide» pour rayonner un champ de vagues). Les termes diagonaux de la matrice de masses et inerties ajoutées ne sont, eux, pas toujours positifs, contrairement à ce qui se passe en fluide illimité. C'est le cas par exemple de la masse ajoutée verticale d'un catamaran, lorsque la période de pilonnement coïncide avec la période propre du mouvement vertical de la masse d'eau entre les deux coques («mode piston»). De même la masse ajoutée en embardée peut devenir négative lorsque la période d'oscillation coïncide avec celle d'un clapotis entre les deux coques. Des comportements analogues peuvent être observés pour les navires équipés de *moonpools*, ou amarrés le long d'un quai.

5.3 Méthodes de résolution

5.3.1 Méthodes (quasi) analytiques

Pour une structure de géométrie quelconque, seule une méthode numérique permet la résolution du problème de diffraction-radiation.

Pour certaines géométries simples, il est possible de résoudre le problème de diffraction-radiation de manière quasi-analytique, par décomposition des potentiels sur des bases de fonctions propres. C'est le cas du cylindre vertical (posé sur le fond marin) ou d'un ensemble de cylindres.

La première étape est d'explicitier ces fonctions propres, que l'on exprime en coordonnées cylindriques R, θ, z . Le Laplacien s'écrit alors :

$$\Delta\varphi = \varphi_{RR} + \frac{1}{R} \varphi_R + \frac{1}{R^2} \varphi_{\theta\theta} + \varphi_{zz} \quad (5.33)$$

On décompose le potentiel en série de Fourier par rapport à l'angle polaire :

$$\varphi(R, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} [\varphi_{cm}(R, z) \cos m\theta + \varphi_{sm}(R, z) \sin m\theta] \quad (5.34)$$

On suppose l'écoulement symétrique par rapport au plan $y = 0$, d'où il résulte que les φ_{sm} sont identiquement nuls. Pour les $\varphi_{cm} \equiv \varphi_m$ l'équation de Laplace prend la forme :

$$\varphi_{mRR} + \frac{1}{R} \varphi_{mR} - \frac{m^2}{R^2} \varphi_m + \varphi_{mzz} = 0 \quad (5.35)$$

On cherche alors des solutions à variables séparées :

$$\varphi_m(R, z) = f_m(R) g_m(z)$$

ce qui fournit deux équations en f_m et g_m :

$$\frac{f_m''}{f_m} + \frac{1}{R} \frac{f_m'}{f_m} - \frac{m^2}{R^2} = \lambda \quad (5.36)$$

$$\frac{g_m''}{g_m} = -\lambda \quad (5.37)$$

Plusieurs types de solutions sont obtenus suivant que λ est positif, nul ou négatif.

Cas $\lambda = k^2$

L'équation en f_m s'écrit alors :

$$R^2 f_m'' + R f_m' - (k^2 R^2 + m^2) f_m = 0 \quad (5.38)$$

et admet pour solutions les fonctions de Bessel modifiées $I_m(kR)$ et $K_m(kR)$.

Les fonctions I_m sont nulles en $R = 0$ sauf pour $m = 0$ et croissent de façon exponentielle avec la distance radiale, alors que les fonctions K_m sont singulières en $R = 0$ et à décroissance

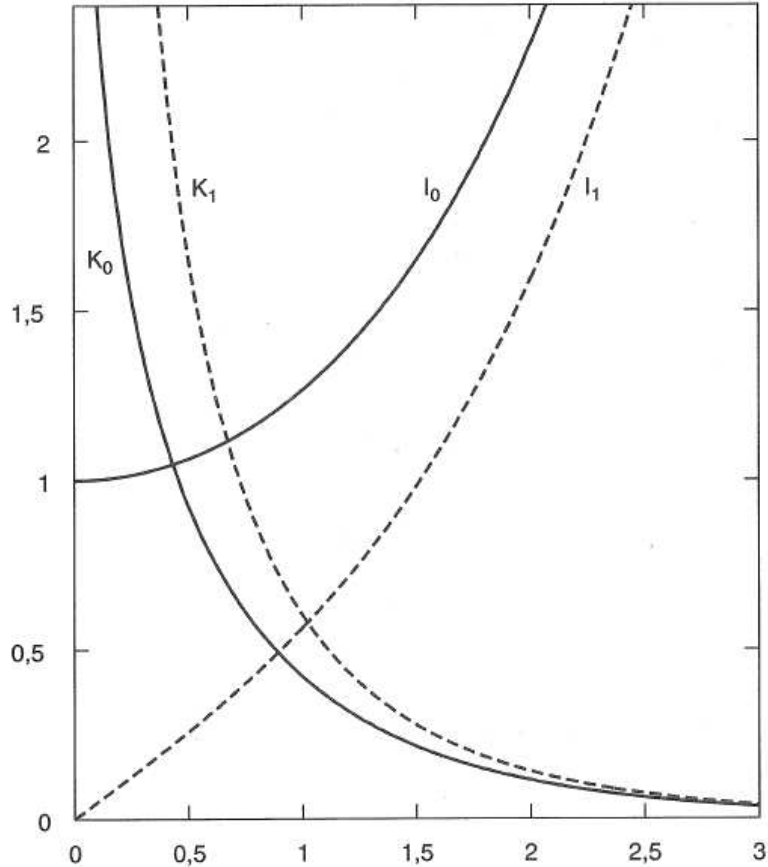


FIG. 5.3 – Les fonctions de Bessel modifiées I_0 , I_1 , K_0 , K_1 .

exponentielle (fig. 5.3). Dans un domaine fluide comprenant l'axe Oz les deuxièmes sont à rejeter, alors que dans un domaine fluide allant jusqu'à l'infini dans la direction radiale ce sont les premières qui sont à éliminer.

L'équation en g_m est alors :

$$g_m'' + k^2 g_m = 0 \quad (5.39)$$

La fonction g_m doit en outre vérifier la condition de glissement en $z = -h$ ($g_{mz} = 0$) et la condition de surface libre en $z = 0$ ($g g_{mz} - \omega^2 g_m = 0$).

On en déduit que les solutions élémentaires sont de la forme :

$$g_m = \cos k_n (z + h) \quad (5.40)$$

où les k_n sont solutions de :

$$\omega^2 = -g k_n \operatorname{tg} k_n h \quad (5.41)$$

Les racines k_n de cette équation forment une suite discrète et valent asymptotiquement $n\pi/h - \omega^2/(n\pi g)$ pour $n \rightarrow \infty$.

Cas $\lambda = 0$

L'équation en f_m devient simplement :

$$R^2 f_m'' + R f_m' - m^2 f = 0 \quad (5.42)$$

et admet pour solutions R^m et R^{-m} . Les solutions g_m associées sont des fonctions linéaires de la cote z , qui ne peuvent à la fois vérifier la condition de glissement sur le fond et la condition de surface libre. Ce cas est donc à rejeter si le domaine considéré est borné à la fois par la surface libre et par un plan horizontal.

Cas $\lambda = -k^2$

L'équation en f_m s'écrit maintenant :

$$R^2 f_m'' + R f_m' + (k^2 R^2 - m^2) f_m = 0 \tag{5.43}$$

et admet pour solutions les fonctions de Bessel $J_m(kR)$ et $Y_m(kR)$ (fig. 5.4). Si le domaine fluide contient l'axe Oz , seules les fonctions J_m (nulles en $R = 0$ sauf pour $m = 0$) sont à retenir, les fonctions Y_m étant singulières à l'origine.

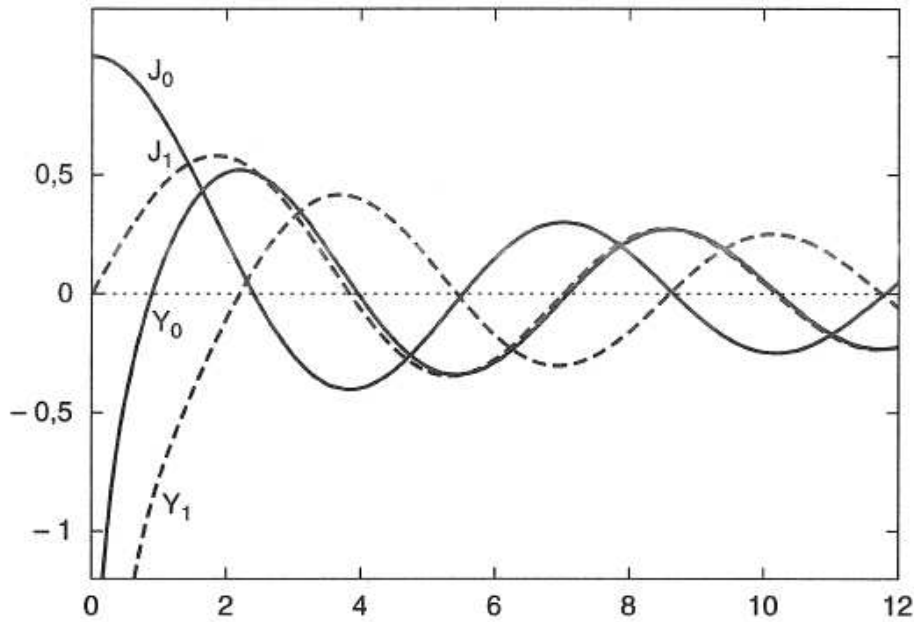


FIG. 5.4 – Les fonctions de Bessel J_0, J_1, Y_0, Y_1 .

Aux grandes distances radiales J_m et Y_m se comportent de façon asymptotique comme :

$$J_m(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \cos\left(kR - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{5.44}$$

$$Y_m(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \sin\left(kR - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{5.45}$$

Si l'on veut que le potentiel recherché satisfasse la condition de radiation (5.30), il apparaît nécessaire d'associer J_m et Y_m de façon que l'onde décrite soit progressive dans la direction radiale :

$$H_m = J_m + iY_m \tag{5.46}$$

H_m est la fonction de Hankel de première espèce.

La fonction en z associée est :

$$g_m = \text{ch } k_0(z + h) \quad (5.47)$$

où k_0 est l'unique solution de :

$$\omega^2 = g k_0 \text{th } k_0 h \quad (5.48)$$

On vérifie facilement que les fonctions en z ainsi obtenues $[\text{ch } k_0(z + h), \cos k_n(z + h)]$ où $\omega^2 = g k_0 \text{th } k_0 h = -g k_n \text{tg } k_n h$ sont orthogonales sur l'intervalle $[-h, 0]$. On peut montrer que la base qu'elles forment est complète.

Diffraction de la houle par un cylindre vertical

On considère le cas d'un cylindre vertical, de section circulaire, reposant sur le fond et perçant la surface libre. La houle incidente, qui se propage suivant l'axe Ox , admet pour potentiel complexe :

$$\varphi_I(x, y, z) = -i \frac{A g}{\omega} \frac{\text{ch } k_0(z + h)}{\text{ch } k_0 h} e^{ik_0 x} \quad (5.49)$$

soit, en coordonnées cylindriques :

$$\varphi_I(R, \theta, z) = -i \frac{A g}{\omega} \frac{\text{ch } k_0(z + h)}{\text{ch } k_0 h} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(k_0 R) \cos m\theta \quad (5.50)$$

où $\epsilon_m = 2 - \delta_{m0}$ ($\epsilon_m = 1$ si $m = 0$, 2 sinon).

De l'analyse qui précède on déduit qu'il convient d'exprimer le potentiel de diffraction φ_D sous la forme :

$$\varphi_D(R, \theta, z) = -i \frac{A g}{\omega} \frac{\text{ch } k_0(z + h)}{\text{ch } k_0 h} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m B_m H_m(k_0 R) \cos m\theta \quad (5.51)$$

Sont ainsi satisfaites les conditions de Laplacien nul, de surface libre, de glissement sur le fond, et de radiation à l'infini.

Seule reste à satisfaire la condition de glissement (5.21) sur la carène, qui s'exprime par :

$$J'_m(k_0 R_0) + B_m H'_m(k_0 R_0) = 0 \quad (5.52)$$

où R_0 est le rayon du cylindre considéré.

On en déduit la valeur de B_m : $B_m = -J'_m(k_0 R_0)/H'_m(k_0 R_0)$ et on peut exprimer le potentiel global de l'écoulement dans tout le domaine fluide :

$$\varphi(R, \theta, z) = -i \frac{A g}{\omega} \frac{\text{ch } k_0(z + h)}{\text{ch } k_0 h} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \left(J_m(k_0 R) - \frac{J'_m(k_0 R_0)}{H'_m(k_0 R_0)} H_m(k_0 R) \right) \cos m\theta \quad (5.53)$$

Les efforts s'obtiennent par l'intégration de la pression sur la carène. Seul le terme d'ordre $m = 1$ donne une contribution non nulle. On obtient :

Pour l'effort horizontal :

$$\begin{aligned} f_x &= -i\pi R_0 \omega \rho \int_{-h}^0 \varphi_1(R_0, z) dz \\ &= -2i\pi \rho A g R_0^2 \frac{\text{th } k_0 h}{k_0 R_0} \left(J_1(k_0 R_0) - \frac{J_1'(k_0 R_0)}{H_1'(k_0 R_0)} H_1(k_0 R_0) \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

On peut transformer cette expression en appliquant la formule de dérivation des fonctions de Bessel :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} J_m(z) \\ Y_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{m-1}(z) \\ Y_{m-1}(z) \end{pmatrix} - \frac{m}{z} \begin{pmatrix} J_m(z) \\ Y_m(z) \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

et la formule dite du Wronskien :

$$J_m(z) Y_{m-1}(z) - J_{m-1}(z) Y_m(z) = \frac{2}{\pi z} \quad (5.56)$$

On obtient alors :

$$f_x = 4\rho g A R_0^2 \frac{\text{th } k_0 h}{(k_0 R_0)^2} \frac{1}{H_1'(k_0 R_0)} \quad (5.57)$$

Et pour le moment de renversement, exprimé par rapport au fond marin :

$$c_y = B_L f_x \quad \text{où } B_L = h \left[1 - \frac{1}{k_0 h} \left(\coth k_0 h - \frac{1}{\text{sh } k_0 h} \right) \right] \quad (5.58)$$

Ces résultats, dus à Havelock pour la profondeur infinie et repris par Mac Camy et Fuchs en profondeur finie, sont exacts et fournissent une référence indispensable pour valider les méthodes numériques et les méthodes approchées, comme la formule de Morison. L'application de cette dernière formule (en n'en retenant que le terme d'inertie) à notre cylindre donne :

$$dF_{\text{Mor}} = 2\rho \pi R_0^2 \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x \partial t} dz \quad (5.59)$$

soit, en écrivant $F_{\text{Mor}} = \Re \{ f_{\text{Mor}} \exp(-i\omega t) \}$ et en effectuant l'intégration en z :

$$f_{\text{Mor}} = -2i\pi \rho A g R_0^2 \text{th } k_0 h \quad (5.60)$$

La figure 5.5 présente la valeur exacte de l'effort sous la forme $f_x/(\rho A g \pi R_0^2 \text{th } k_0 h)$. On constate que lorsque $k_0 R_0$ tend vers zéro sa partie imaginaire tend effectivement vers -2 et sa partie réelle vers zéro. D'un point de vue pratique $k_0 R_0 = 0,5$ apparaît comme une valeur limite au-delà de laquelle l'application de la formule de Morison n'est plus justifiée. Cela signifie une longueur d'onde égale à 6 diamètres.

Élévation de surface libre

L'expression obtenue pour le potentiel permet d'avoir accès à la cinématique fluide en tout point, ainsi qu'à l'élévation de surface libre, information d'intérêt par exemple pour les calculs de hauteur de pont. En particulier sur le cylindre même l'élévation prend la forme :

$$\eta(\theta, t) = A \Re \{ f_\eta(\theta) e^{-i\omega t} \} \quad (5.61)$$

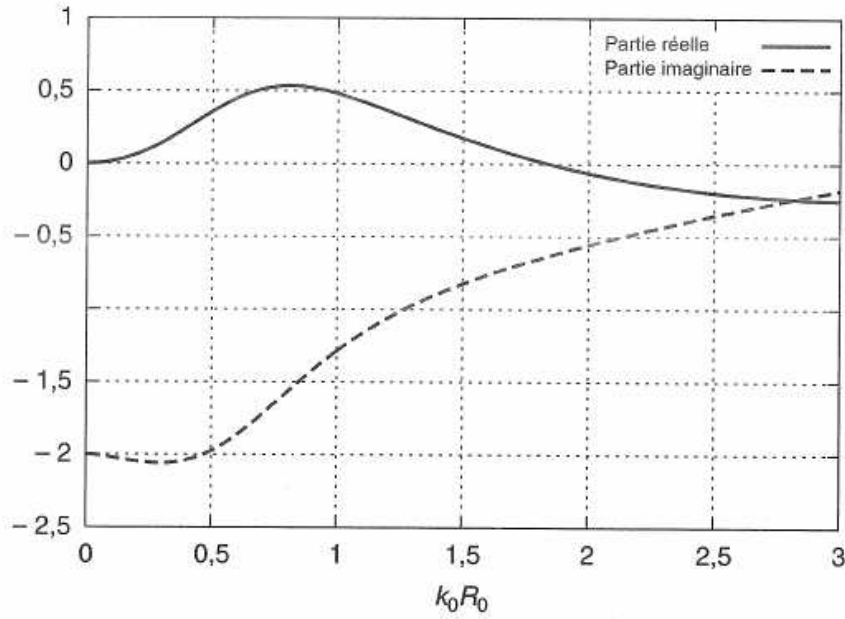


FIG. 5.5 – Diffraction d'une houle régulière sur un cylindre vertical. Parties réelle et imaginaire de l'effort horizontal, en fonction de $k_0 R_0$.

où :

$$f_\eta(\theta) = \frac{2}{\pi k_0 R_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m i^{m+1}}{H'_m(k_0 R_0)} \cos m\theta \quad (5.62)$$

La figure 5.6 présente le module de l'élévation adimensionnelle f_η en fonction de θ , pour trois valeurs de $k_0 R_0$: 0,5 ; 1 et 2. Le maximum est atteint du côté exposé à la houle incidente, en $\theta = \pi$. On note que la surélévation obtenue, par rapport à l'amplitude de la houle incidente, atteint déjà près de 50 % pour $k_0 R_0 = 0,5$. La figure 5.7 présente l'élévation obtenue en $\theta = \pi$, en fonction de $k_0 R_0$. La valeur asymptotique, pour $k_0 R_0 \rightarrow \infty$, est égale à 2, ce qui correspond au cas bi-dimensionnel de la réflexion d'une onde plane par un mur.

Radiation

De manière analogue on peut résoudre le problème de radiation en cavalement, ou pour un mouvement de rotation en pied, qui correspond par exemple au cas d'une colonne oscillante.

Pour le cavalement la condition de glissement à satisfaire sur la carène s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \varphi_{R1}}{\partial R} \right|_{R=R_0} = -n_{0x} = \cos \theta \quad (5.63)$$

On est donc conduit à exprimer le potentiel de radiation sous la forme :

$$\varphi_{R1}(R, \theta, z) = \cos \theta \left\{ A_0 \frac{\text{ch} k_0(z+h)}{\text{ch} k_0 h} \frac{H_1(k_0 R)}{k_0 H'_1(k_0 R_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n(z+h) \frac{K_1(k_n R)}{k_n K'_1(k_n R_0)} \right\} \quad (5.64)$$

On note, par rapport au problème de diffraction, la prise en compte des termes en $\cos k_n(z+h) K_1(k_n R)$, nécessaires pour que soit assurée la condition de glissement sur le

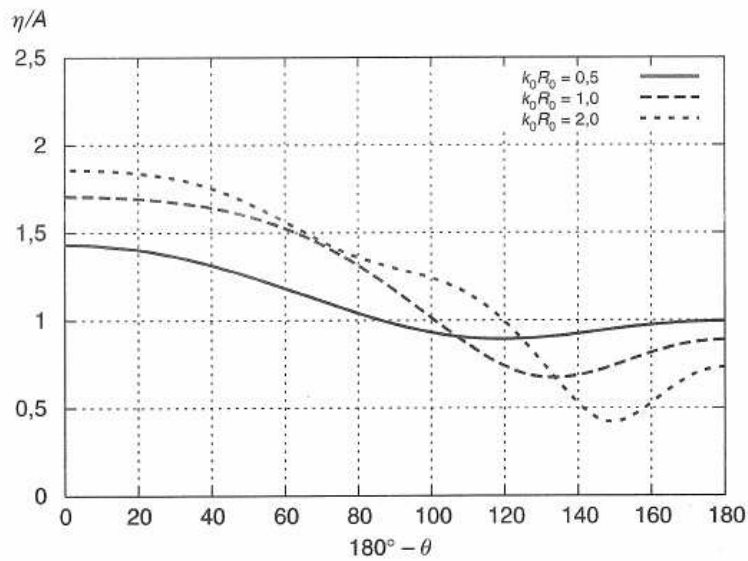


FIG. 5.6 – Diffraction d’une houle régulière par un cylindre vertical. Élévation de surface libre le long du cylindre, pour $k_0 R_0 = 0,5$; 1 et 2.

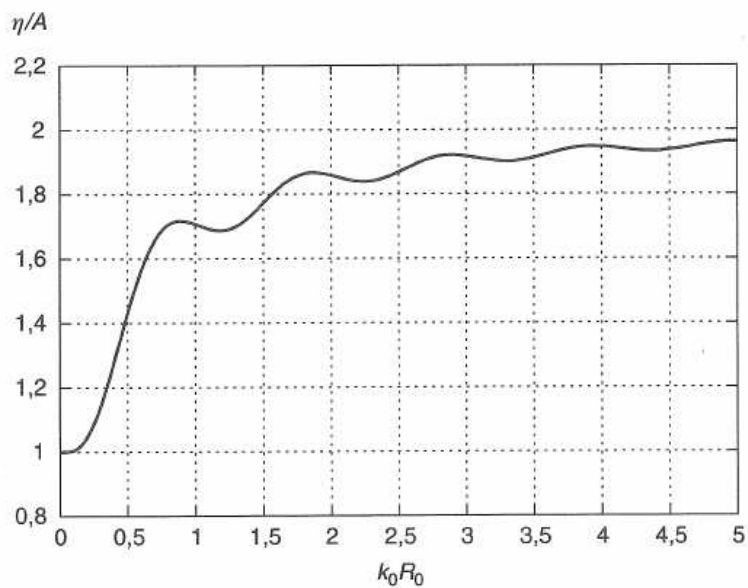


FIG. 5.7 – Diffraction d’une houle régulière par un cylindre vertical. Élévation de surface libre en $\theta = \pi$, en fonction de $k_0 R_0$.

cylindre. Décroissant de façon quasi-exponentielle avec la distance radiale, ces termes ne sont appréciables que localement, au voisinage immédiat du cylindre. On parle de **termes (ou modes) évanescents**. A l’inverse le terme en $\text{ch}k_0(z + h) H_1(k_0 R)$ représente un champ de vagues radial d’amplitude décroissant en $R^{-1/2}$. C’est la composante **progressive** (ou propagative). Il lui est associé un flux d’énergie.

La condition de glissement s'écrit alors :

$$A_0 \frac{\operatorname{ch} k_0(z+h)}{\operatorname{ch} k_0 h} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n(z+h) = 1 \quad (5.65)$$

et doit être vérifiée pour tout z de $-h$ à 0 .

Pour cela on tire parti de l'orthogonalité des fonctions élémentaires en z sur $[0, h]$, en multipliant les deux membres par $\operatorname{ch} k_0(z+h) / \operatorname{ch} k_0 h$, et en les intégrant en z de $-h$ à 0 ; puis en procédant de même avec les $\cos k_n(z+h)$. On obtient :

$$A_0 = \frac{2 \operatorname{sh} 2k_0 h}{2k_0 h + \operatorname{sh} 2k_0 h} \quad A_n = \frac{4 \sin k_n h}{2k_n h + \sin 2k_n h} \quad (5.66)$$

La masse ajoutée M_{a11} et l'amortissement de radiation B_{11} en cavement s'obtiennent alors par :

$$M_{a11} + i \frac{B_{11}}{\omega} = -\rho \pi R_0 \left(A_0 \frac{H_1(k_0 R_0) \operatorname{th} k_0 h}{k_0^2 H_1'(k_0 R_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{K_1(k_n R_0) \sin k_n h}{k_n^2 K_1'(k_n R_0)} \right) \quad (5.67)$$

où, conformément aux observations ci-dessus, on obtient que seul le premier terme contribue à l'amortissement, et que les modes évanescents ne contribuent qu'à la masse ajoutée.

Les figures 5.8 et 5.9 présentent les coefficients de masse ajoutée et amortissement, sous la forme adimensionnelle $M_{a11}/(\rho \pi R_0^2 h)$ et $B_{11}/(\omega \rho \pi R_0^2 h)$, en fonction de $k_0 R_0$, pour trois valeurs du rapport rayon sur profondeur : $R_0/h = 0,1 ; 0,2 ; 0,5$. En ce qui concerne le coefficient de masse ajoutée la valeur limite 1 est atteinte lorsque $k_0 R_0$ tend vers zéro. Le coefficient d'amortissement est asymptotiquement nul lorsque $k_0 R_0$ tend vers zéro ou l'infini : le cylindre ne rayonne plus de vagues.

On peut de la même façon obtenir le potentiel de radiation pour le mouvement de tangage en pied. La condition de glissement s'écrit alors :

$$\left. \frac{\partial \varphi_{R5}}{\partial R} \right|_{R=R_0} = -(z+h) n_{0x} = (z+h) \cos \theta \quad (5.68)$$

Il suffit pour cela de déterminer les coefficients A_0, A_n tels que :

$$A_0 \frac{\operatorname{ch} k_0(z+h)}{\operatorname{ch} k_0 h} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n(z+h) = z+h \quad (5.69)$$

pour tout z de $-h$ à 0 .

Le théorème de Haskind

Le théorème de Haskind permet de calculer les efforts d'excitation à partir du champ lointain du potentiel de radiation suivant le degré de liberté considéré.

Soit donc l'effort suivant le degré de liberté k :

$$f_k = i\rho \omega \iint_{S_{C_0}} (\varphi_I + \varphi_D) N_{0k} dS = i\rho \omega \iint_{S_{C_0}} (\varphi_I + \varphi_D) \frac{\partial \varphi_{Rk}}{\partial n} dS \quad (5.70)$$

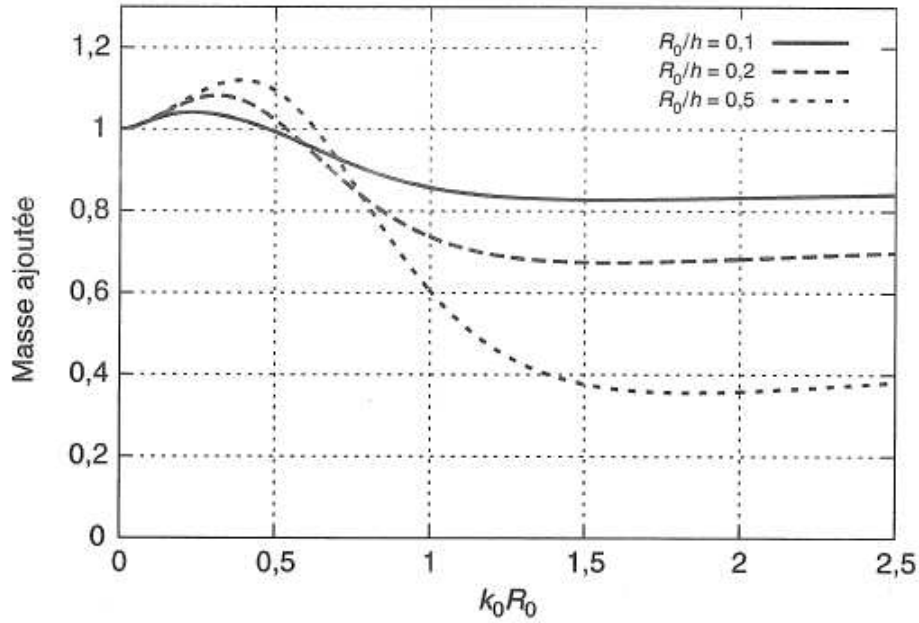


FIG. 5.8 – *Cylindre vertical posé sur le fond marin. Masse ajoutée en cavement en fonction de $k_0 R_0$ pour trois rapports R_0/h .*

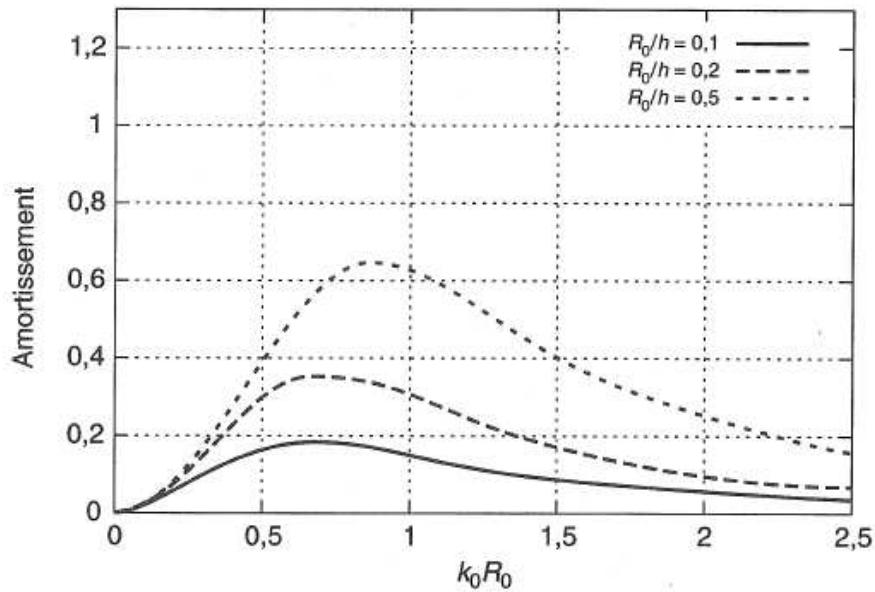


FIG. 5.9 – *Cylindre vertical posé sur le fond marin. Amortissement de radiation en cavement en fonction de $k_0 R_0$ pour trois rapports R_0/h .*

D'après la deuxième formule de Green :

$$\iint_{S_{C_0} \cup (z=0) \cup (z=-h) \cup S_\infty} \left(\varphi_D \frac{\partial \varphi_{Rk}}{\partial n} - \varphi_{Rk} \frac{\partial \varphi_D}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (5.71)$$

On vérifie, à l'aide des conditions aux limites satisfaites par φ_D et φ_{Rk} , que les intégrales

sur le fond, la surface libre et à l'infini sont nulles. Il vient donc :

$$\iint_{S_{C_0}} \varphi_D \frac{\partial \varphi_{Rk}}{\partial n} dS = \iint_{S_{C_0}} \varphi_{Rk} \frac{\partial \varphi_D}{\partial n} dS = - \iint_{S_{C_0}} \varphi_{Rk} \frac{\partial \varphi_I}{\partial n} dS \quad (5.72)$$

D'où :

$$f_k = i\rho\omega \iint_{S_{C_0}} \left(\varphi_I \frac{\partial \varphi_{Rk}}{\partial n} - \varphi_{Rk} \frac{\partial \varphi_I}{\partial n} \right) dS \quad (5.73)$$

Soit, en appliquant à nouveau la deuxième formule de Green pour passer à l'infini :

$$f_k = -i\rho\omega \iint_{S_\infty} \left(\varphi_I \frac{\partial \varphi_{Rk}}{\partial R} - \varphi_{Rk} \frac{\partial \varphi_I}{\partial R} \right) dS \quad (5.74)$$

où S_∞ est un cylindre circulaire de rayon (tendant vers l') infini.

L'application du théorème de la phase stationnaire permet alors de relier l'effort d'excitation, pour une houle d'incidence β , à la valeur de la fonction de Kochin $H_{Rk}(\beta + \pi)$ (dans la direction opposée) du potentiel de radiation φ_{Rk} . On peut aussi en déduire certaines relations entre efforts d'excitation et amortissements de radiation. Dans certains logiciels les efforts sont calculés des deux manières, par résolution directe du problème de diffraction, et par l'application du théorème de Haskind, la confrontation des deux séries de résultats permettant d'appréhender la convergence numérique.

On peut vérifier, à titre d'exercice, dans le cas du cylindre, que l'on retrouve ainsi (à partir des expressions données pour le potentiel incident et pour le potentiel de radiation) l'effort donné plus haut.

Diffraction par un ensemble de cylindres verticaux

On considère ici un ensemble de cylindres verticaux, reposant sur le fond et perçant la surface libre. Cette géométrie s'apparente fortement aux colonnes des plates-formes semi-submersibles ou embase-poids, particulièrement aux petites périodes de houle où seules les parties supérieures des colonnes sont atteintes et où les réflexions multiples entre les colonnes deviennent appréciables.

Soient donc N_C cylindres verticaux de rayons R_{j0} et d'axes de révolution centrés en x_j, y_j .

La houle incidente se propage dans la direction β et admet pour potentiel :

$$\varphi_I(x, y, z) = -i \frac{Ag}{\omega} \frac{\text{ch } k_0(z+h)}{\text{ch } k_0 h} e^{ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (5.75)$$

soit :

$$\varphi_I(x, y, z) = C(z) e^{ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (5.76)$$

La méthode de résolution utilisée précédemment pour un cylindre seul suggère d'exprimer le potentiel de diffraction sous la forme :

$$\varphi_D(P) = C(z) \sum_{j=1}^{N_C} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{jm} E_{jm} H_m(k_0 R_j) e^{im\theta_j} \quad (5.77)$$

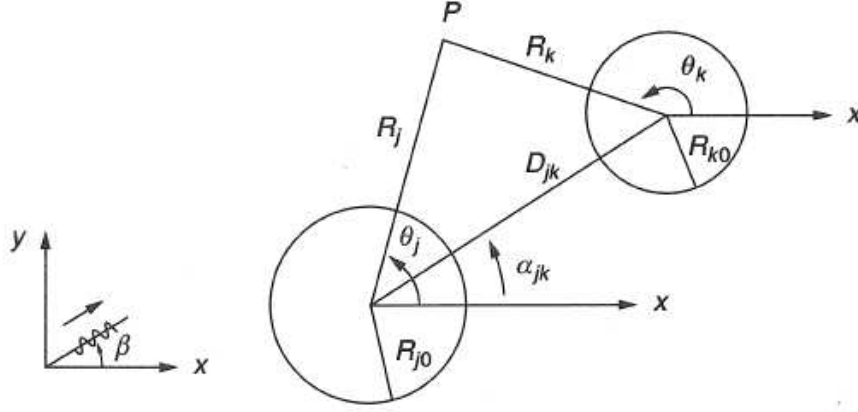


FIG. 5.10 – Définitions géométriques.

où :

$$E_{jm} = \frac{J'_m(k_0 R_{j0})}{H'_m(k_0 R_{j0})} \quad (5.78)$$

et où (R_j, θ_j) sont les coordonnées polaires du point P considéré dans le système d'axes lié au cylindre j .

Les coefficients A_{jm} vont être déterminés en exprimant la condition de glissement sur chaque cylindre. Dans le repère lié au cylindre k le potentiel incident s'écrit :

$$\varphi_I(R_k, \theta_k, z) = C(z) I_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_0 R_k) e^{im(\frac{\pi}{2}-\beta)} e^{im\theta_k} \quad (5.79)$$

où :

$$I_k = e^{ik_0(x_k \cos \beta + y_k \sin \beta)} \quad (5.80)$$

Pour exprimer dans le repère lié au cylindre k les potentiels de diffraction émanant des $N_C - 1$ autres cylindres, on fait appel au théorème d'addition de Graf qui s'écrit :

$$H_m(k_0 R_j) e^{im(\theta_j - \alpha_{jk})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m+n}(k_0 D_{jk}) J_n(k_0 R_k) e^{in(\pi + \alpha_{jk} - \theta_k)} \quad (5.81)$$

valable pourvu que que $R_k < D_{jk}$, donc au voisinage du cylindre k .

Changeant n en $-n$, et tenant compte de ce que $J_{-n} = (-1)^n J_n$, on obtient :

$$H_m(k_0 R_j) e^{im\theta_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}(k_0 D_{jk}) J_n(k_0 R_k) e^{i(m-n)\alpha_{jk}} e^{in\theta_k} \quad (5.82)$$

Le potentiel de diffraction dû aux $N_C - 1$ autres cylindres exprimé dans le repère (R_k, θ_k) du cylindre k s'écrit donc :

$$\varphi_{D_{j \neq k}} = C(z) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N_C} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{jm} E_{jm} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m-n}(k_0 D_{jk}) e^{i(m-n)\alpha_{jk}} J_n(k_0 R_k) e^{in\theta_k} \quad (5.83)$$

Soit, en permutant les sommations et en interchangeant les indices m et n :

$$\varphi_{D_{j \neq k}} = C(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N_C} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{jn} E_{jn} H_{n-m}(k_0 D_{jk}) e^{i(n-m)\alpha_{jk}} \right\} J_m(k_0 R_k) e^{im\theta_k} \quad (5.84)$$

On peut maintenant expliciter la condition de glissement sur le cylindre k :

$$A_{km} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N_C} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{jn} E_{jn} H_{n-m}(k_0 D_{jk}) e^{i(n-m)\alpha_{jk}} = -I_k e^{im(\frac{\pi}{2}-\beta)} \quad (5.85)$$

pour $m = -\infty, \dots, 0, 1, \dots, \infty$.

En pratique on tronque les sommations infinies à un ordre M tel que les termes suivants soient illusoires (M compris entre 5 et 10 suffit en général à assurer une excellente précision numérique). On aboutit à un système linéaire de rang $N_C(2M+1)$ dont la résolution fournit les coefficients A_{jm} .

Le potentiel global de l'écoulement, au voisinage du cylindre k , se met alors sous la forme simple :

$$\varphi(R_k, \theta_k, z) = C(z) \sum_{m=-M}^M A_{km} \left(E_{km} H_m(k_0 R_k) - J_m(k_0 R_k) \right) e^{im\theta_k} \quad (5.86)$$

expression valable pour R_k tel que : $R_k < D_{jk} \quad \forall j \neq k$

En particulier sur le cylindre k lui-même cette expression se simplifie encore par l'application de la formule du Wronskien :

$$\varphi(R_{k0}, \theta_k, z) = C(z) \frac{-2i}{\pi k_0 R_{k0}} \sum_{m=-M}^M \frac{A_{km}}{H'_m(k_0 R_{k0})} e^{im\theta_k} \quad (5.87)$$

et se prête donc particulièrement bien au calcul des efforts.

Un grand intérêt de cette méthode est que l'on obtient, de façon analytique, le potentiel de l'écoulement dans tout le domaine fluide. On peut donc, à faible coût, visualiser les déformées de surface libre et estimer l'incidence des réflexions multiples entre les colonnes sur les surélévations et donc le tirant d'air nécessaire (figure 5.11). Elle est aussi d'un grand intérêt pour le calcul des efforts de deuxième ordre en mode somme sur les TLP (plates-formes sur lignes tendues), problème que l'on aborde au chapitre suivant.

5.3.2 Méthodes numériques

Ce sont, essentiellement, les méthodes dites d'équation intégrale, où la carène est représentée par une distribution de singularités (sources seules ou sources et doublets normaux). Ces singularités (fonctions de Green) vérifient la condition de Laplace et toutes les conditions aux limites (fond, surface libre, radiation à l'infini), hormis la condition de glissement sur

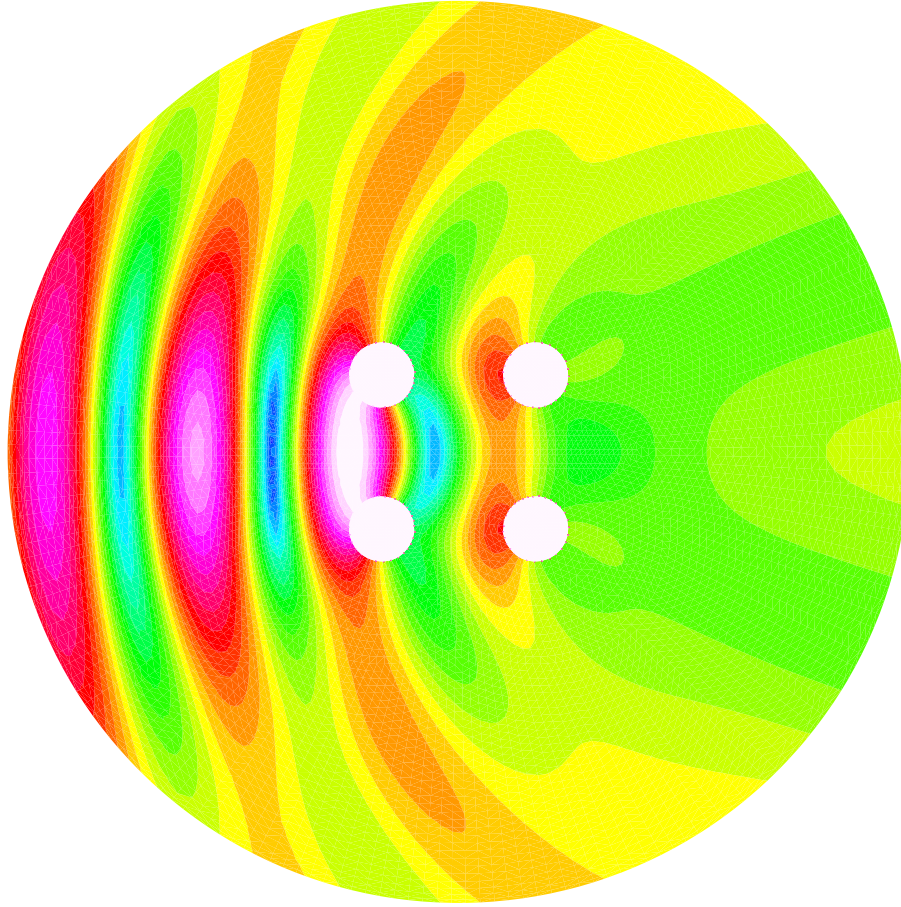


FIG. 5.11 – Diffraction d’une houle régulière par un ensemble de 4 cylindres verticaux. Taches isovaleurs du module de l’élévation de surface libre, pour $k_0D = 3,25$ et $k_0R_0 = 0,63$, D étant l’entraxe. La couleur rose correspond à des maxima, le bleu à des minima. La houle incidente se propage de gauche à droite.

la carène. Dans le cas le plus fréquent où l’on utilise une distribution de sources seules, on représente ainsi les potentiels élémentaires de diffraction ou de radiation sous la forme :

$$\varphi_D(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{C_0}} \sigma(Q) G(P,Q) dS_Q \quad (5.88)$$

$G(P,Q)$ est la fonction de Green, de la forme $1/PQ + H$, où H est une fonction régulière. P est un point dans le domaine fluide et Q un point courant sur la carène. σ est la densité de source. Le passage à la limite où P est sur la carène permet d’y exprimer le gradient de φ_D sous la forme :

$$\nabla\varphi_D(P) = -\frac{1}{2}\sigma(P)\vec{n}_0 + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{C_0}} \sigma(Q) \nabla G(P,Q) dS_Q \quad (5.89)$$

La condition de glissement s’exprime donc par une équation intégrale, qui est résolue numériquement. Le coût de résolution a longtemps été pénalisé par des difficultés de mise au point d’algorithmes numériques efficaces pour le calcul des fonctions de Green (exprimées

sous forme d'intégrales de Fourier), et pour la résolution des systèmes linéaires obtenus. Aujourd'hui les modèles numériques qui résolvent le problème de diffraction-radiation tournent sur PC et ils sont devenus des outils d'ingénierie.

Le logiciel le plus répandu est apparemment *WAMIT*, développé initialement au Massachusetts Institute of Technology. En France on peut citer *AQUADYN* de l'Ecole Centrale de Nantes, *DIODORE* de Principia ou *HYDROSTAR* du Bureau Veritas.

Une deuxième approche est celle des éléments finis fluides, dans un certain domaine autour de la carène. Ce domaine fluide étant nécessairement fini, il se pose le problème des conditions aux limites à afficher sur sa frontière extérieure. Une solution est d'effectuer un raccordement avec des expansions asymptotiques du type de celles que l'on a établies au paragraphe précédent (*COREV*, *TRITON* de l'IFP), une autre de coupler la résolution éléments finis à une équation intégrale (*MELINA* développé au sein du Groupe d'Hydrodynamique Navale de l'ENSTA). Un désavantage, par rapport à la méthode d'équation intégrale, est que c'est le domaine fluide qui doit être discrétisé, et non seulement la carène.

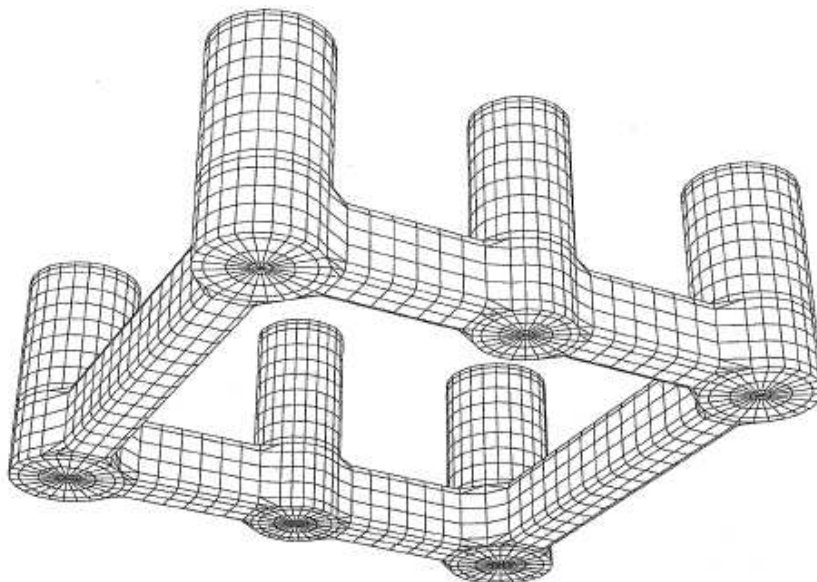


FIG. 5.12 – *Maillage d'une carène de plate-forme sur lignes tendues pour calcul de diffraction-radiation.*

5.3.3 Les méthodes approchées

Ce sont, par exemple, les théories des tranches pour les navires, qui offrent surtout l'intérêt de permettre la prise en compte de la vitesse d'avance.

On va plutôt s'intéresser ici aux plates-formes semi-submersibles, pour lesquelles les codes de diffraction radiation sont mal adaptés aux phases de pré-dimensionnement. On a vu, lors de l'étude de la diffraction par un cylindre vertical, qu'aux faibles valeurs de $k_0 R_0$ (inférieures à 0,5) les résultats théoriques peuvent se retrouver très simplement, en assimilant localement (en z) l'écoulement à un courant uniforme de vitesse variable en temps. Ce résultat est à la base du terme d'inertie de la formule de Morison, qui relie les efforts à l'accélération locale

du fluide par :

$$dF = \rho (1 + C_m) S \frac{\partial U}{\partial t} dL \quad (5.90)$$

où C_m est le coefficient de masse ajoutée, S la section, et U la projection de la vitesse dans le plan de la section du cylindre. Pour une section circulaire C_m est égal à 1.

La méthode que l'on va utiliser pour calculer la réponse à la houle d'une plate-forme semi-submersible repose sur la démarche et les hypothèses suivantes :

- on calcule les efforts sur chacun de ses éléments constitutifs: colonnes et pontons en le considérant isolément, donc en négligeant tout effet d'interaction ;
- pour chaque élément on applique une théorie des tranches ;
- on relie les efforts appliqués sur chaque tranche à l'accélération locale de l'écoulement incident, à l'aide des coefficients de masse ajoutée en fluide illimité. On suit donc la même démarche que pour les petits corps étudiés au chapitre 4, avec la simplification supplémentaire que le terme de traînée est négligé, les nombres de Keulegan-Carpenter de l'écoulement étant petits.

Dans cette approche, on ne peut donc à proprement parler dire que l'on résout le problème de diffraction puisque les effets de surface libre ne sont pas pris en compte.

On va, à titre illustratif, l'appliquer à une semi-submersible élémentaire, constituée d'une seule colonne et d'un seul ponton, et se limiter au calcul du mouvement de pilonnement.

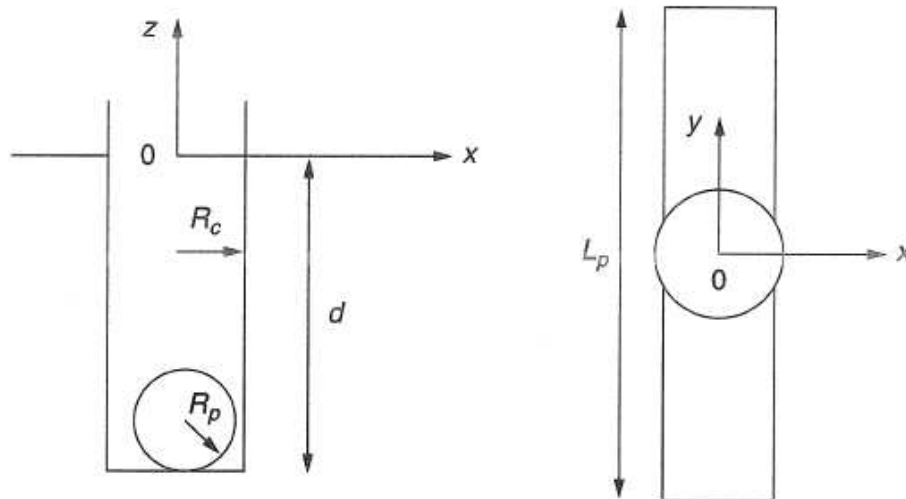


FIG. 5.13 – *Système colonne-ponton. Définitions géométriques.*

On suppose la colonne de section circulaire, de rayon R_C et de tirant d'eau d . Le ponton est de section quelconque (par exemple rectangulaire), de volume V_P . On suppose l'axe du ponton suffisamment voisin de la base de la colonne pour pouvoir confondre leurs deux cotes verticales.

Enfin on se place en profondeur infinie, et on suppose que la houle incidente se propage dans la direction perpendiculaire au ponton. Elle admet pour potentiel :

$$\Phi_I(x, z, t) = \frac{Ag}{\omega} e^{kz} \sin(kx - \omega t) \quad (5.91)$$

Pour ce type de structure le mouvement de pilonnement est découplé des autres mouvements (dans le cadre d'une théorie linéaire). Les efforts verticaux sur le ponton s'obtiennent

par :

$$dF_{Pz} = (1 + C_m) \rho S_P \Phi_{Izt} dL_P \quad (5.92)$$

C_m étant le coefficient de masse ajoutée dans le sens vertical, S_P la surface de la section et L_P la longueur du ponton. Soit :

$$F_{Pz} = -(1 + C_m) \rho V_P A g k e^{-kd} \cos \omega t \quad (5.93)$$

avec $C_m = 1$ pour une section circulaire.

La colonne ne peut être considérée comme «petite» dans le sens vertical et, de plus, elle n'est qu'en partie immergée, aussi il n'est pas possible de relier l'effort vertical qui s'y applique à l'accélération verticale de l'écoulement. On admet que l'on en obtient une bonne approximation en intégrant la pression de l'écoulement incident seul sur sa base (un meilleur calcul est de l'intégrer sur une base fictive située un tiers de diamètre plus bas). Ce qui conduit à :

$$F_{Cz} = \rho \pi R_C^2 A g e^{-kd} \cos \omega t \quad (5.94)$$

L'effort vertical total s'écrit alors :

$$F_z = \rho \left[V_C - (1 + C_m) k d V_P \right] \frac{A g}{d} e^{-kd} \cos \omega t \quad (5.95)$$

où V_C désigne le volume de la colonne et V_P celui du ponton.

La masse ajoutée verticale de la colonne est négligeable devant sa masse propre. Celle du ponton vaut :

$$M_{aPz} = C_m \rho V_P$$

La masse propre étant, elle :

$$M = \rho (V_C + V_P)$$

et la raideur hydrostatique :

$$K = \rho g \pi R_C^2 = \rho g \frac{V_C}{d}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\rho \left[V_C + (1 + C_m) V_P \right] \frac{d^2 z}{dt^2} + \rho g \frac{V_C}{d} z = \rho \left[V_C - (1 + C_m) k d V_P \right] \frac{A g}{d} e^{-kd} \cos \omega t \quad (5.96)$$

La pulsation propre est donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{d} \frac{V_C}{V_C + (1 + C_m) V_P} = \frac{g}{d} \frac{1}{1 + \alpha} \quad (5.97)$$

où α désigne le rapport du déplacement «apparent» du ponton à celui de la colonne :

$$\alpha = \frac{(1 + C_m) V_P}{V_C}$$

On remarque que pour :

$$\omega^2 = \frac{g}{d} \frac{1}{\alpha} = \omega_e^2$$

les efforts verticaux s'annulent.

La période $T_e = 2\pi/\omega_e$ est appelée période d'équilibrage. Le rapport $\omega_e/\omega_0 = (1 + \alpha)/\alpha$ est supérieur à 1. La période d'équilibrage est donc inférieure à la période propre, et en est d'autant plus rapprochée que α est grand.

Avec ces deux définitions le mouvement de pilonnement s'écrit :

$$z = A \frac{\omega_0^2}{\omega_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{-kd} \cos \omega t \quad (5.98)$$

où $k = \omega^2/g$

Le mouvement de pilonnement est d'autant plus petit que le tirant d'eau est important. Il est en phase avec la houle, sauf pour les périodes comprises entre la période d'équilibrage et la période propre où il est en opposition de phase : la plate-forme s'enfonce lorsque la crête passe, ce qui est évidemment contraignant pour les calculs de hauteur du pont.

La figure 5.14 présente les fonctions de transfert (en valeur absolue) obtenues par l'application de la relation (5.98), pour différentes valeurs de ω_e/ω_0 , et pour $\omega_0^2 d/g = 0,13$ (soit une période propre de 25 secondes à un tirant d'eau de 20 mètres).

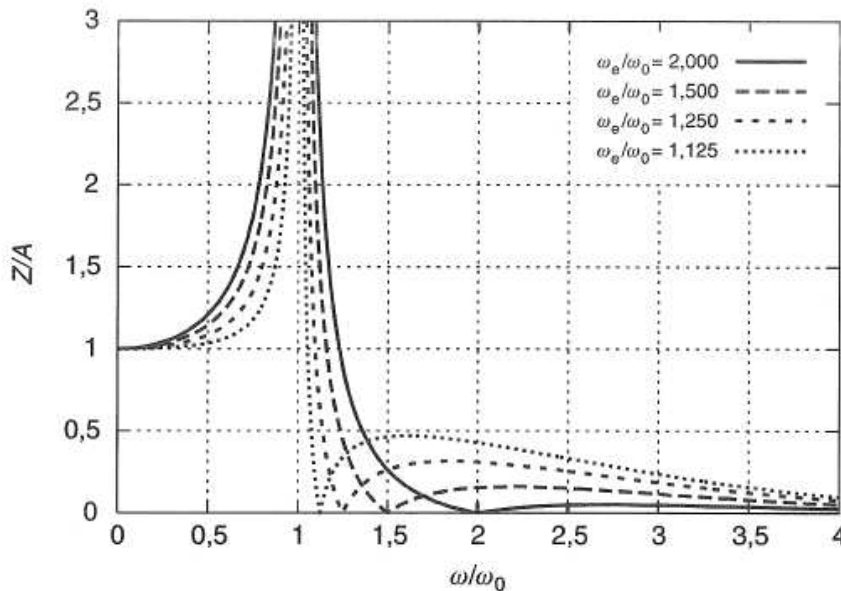


FIG. 5.14 – *Système colonne-ponton. Fonction de transfert en pilonnement pour différents rapports ω_e/ω_0 , en fonction de ω/ω_0 .*

Implication pour le dimensionnement des semi-submersibles et des plates-formes sur lignes tendues

Le «bon» comportement des plates-formes semi-submersibles est dû à leur tirant d'eau important, et surtout à ce phénomène d'équilibrage qui entraîne une annulation complète des efforts d'excitation (dans le cadre d'une théorie potentielle ; en raison des effets visqueux on n'a jamais annulation complète).

Il devient par contre très mauvais lorsqu'on dépasse la période d'équilibrage et que l'on se rapproche de la période propre. Aussi, dans leur dimensionnement, vise-t-on une période

d'équilibrage qui soit la limite supérieure des périodes de houles qu'elles sont susceptibles de rencontrer. Pour un tirant d'eau de 20 mètres et une période d'équilibrage de 20 secondes (valeurs typiques), on obtient pour le rapport α :

$$\alpha = \frac{g}{d\omega_e^2} \simeq 5$$

La période propre en pilonnement est alors :

$$T_0 = \frac{1 + \alpha}{\alpha} T_e \simeq 24 \text{ secondes}$$

Il en ressort que les plates-formes semi-submersibles requièrent des coefficients α importants, soit donc des pontons volumineux, et de préférence aplatis (pour maximiser le coefficient C_m).

Pour les plates-formes sur lignes tendues la stratégie est différente puisque, leur mouvement de pilonnement étant bloqué, il s'agit essentiellement de minimiser les efforts verticaux sur toute une gamme de périodes. Le choix de la meilleure période d'équilibrage résulte d'un compromis entre les surtensions dans les tendons en condition de design (la houle centenaire) et les phénomènes de fatigue dus principalement aux vagues dont les périodes sont dans la gamme 8-12 secondes. En conditions mer du Nord, on vise habituellement une période d'équilibrage de l'ordre de 14 secondes, ce qui, pour un tirant d'eau de 40 mètres, conduit à :

$$\alpha \simeq 1,2$$

Des pontons de section carrée ($C_m = 1,2$, la masse ajoutée étant rapportée à la section) ne représentent plus alors que 30 % du déplacement total.

On peut généraliser cette méthode (connue sous le nom de méthode de Hooft) au calcul du mouvement complet (six degrés de liberté) d'une plate-forme semi-submersible composée d'un ensemble de colonnes et de pontons. Pour apparemment grossières que soient les hypothèses de départ, les résultats obtenus sont d'une qualité largement suffisante pour les phases de prédimensionnement.

5.4 Cas de plusieurs corps

Il est possible, par quelques adaptations du modèle théorique, de traiter le cas de plusieurs corps en proximité. Par exemple la configuration dite à couple de deux navires. Pour cela on continue de traiter d'abord des problèmes élémentaires de diffraction et radiation, au nombre de $1 + 6 N_C$, où N_C est le nombre de corps en présence. Le problème de diffraction ne change pas : chaque structure est supposée immobile, et on intègre la pression sur chaque corps séparément pour déterminer les efforts d'excitation qui s'y appliquent. Pour la radiation on considère successivement chaque structure, mise en mouvement suivant un de ses six degrés de liberté, les $N_C - 1$ autres structures restant immobiles. Elles ressentent alors des efforts hydrodynamiques du fait du mouvement de la première, qui s'expriment par des termes de masses ajoutées et d'amortissement croisés. Par exemple :

$$\Re \{ (\omega^2 M_{akl}^{ij} + i\omega B_{kl}^{ij}) x_l^j e^{-i\omega t} \} \quad (5.99)$$

représente l'effort suivant le degré de liberté k ressenti par la structure i lorsque la structure j oscille avec une amplitude x_l^j suivant son degré de liberté l . On définit ainsi des matrices de masses et inerties ajoutées, et d'amortissements de radiation, de rang $6 N_C$.

De manière équivalente on peut considérer l'ensemble des N_C corps comme une structure unique qui possède $6N_C$ modes de déformation. Une généralisation naturelle est alors celle de structures élastiques, dont les périodes propres des modes de déformation tombent dans les périodes de houle. C'est le cas par exemple des aéroports flottants ou autres VLFS (*Very Large Floating Structures*).

La plupart des codes industriels de diffraction radiation permettent de traiter les configurations multi-corps. Quelques uns peuvent traiter des structures élastiques, les déformations étant habituellement décomposées sur la base des modes rigides et des modes dits «secs» (modes propres de déformation dans le vide, sans effets des masses ajoutées ni des raideurs hydrostatiques).

5.5 Réponse sur houle irrégulière

Dans le cadre de la théorie linéaire le mouvement d'une structure flottante soumise à une houle monochromatique prend place à la même pulsation et son amplitude est proportionnelle à celle de la houle.

Si l'élévation de la houle incidente, en un point de référence, est donnée par :

$$\eta_I(t) = \Re \{ A e^{-i\omega t} \} \quad (5.100)$$

le mouvement de la structure suivant le degré de liberté k s'écrit :

$$X_k(t) = \Re \{ x_k e^{-i\omega t} \} = \Re \{ A f_k(\omega, \beta) e^{-i\omega t} \} \quad (5.101)$$

$f_k(\omega, \beta)$ est la **fonction de transfert** (complexe) du mouvement k (en anglais : RAO pour *Response Amplitude Operator*).

Un balayage en pulsation ω et incidence β à l'aide d'un modèle de diffraction-radiation permet de bâtir ces fonctions de transfert.

Pour une houle irrégulière unidirectionnelle d'incidence β , d'élévation au point de référence :

$$\eta_I(t) = \Re \left\{ \sum_i A_i e^{i(-\omega_i t + \theta_i)} \right\} \quad (5.102)$$

le mouvement k de la structure est simplement la somme de tous les mouvements élémentaires :

$$X_k(t) = \Re \left\{ \sum_i A_i f_k(\omega_i, \beta) e^{i(-\omega_i t + \theta_i)} \right\} \quad (5.103)$$

Il s'ensuit que son spectre s'écrit :

$$S_{X_k}(\omega) = S(\omega) f_k(\omega, \beta) f_k^*(\omega, \beta) \quad (5.104)$$

où f_k^* désigne le complexe conjugué.

Pour une houle multidirectionnelle on a :

$$S_{X_k}(\omega) = \int_0^{2\pi} S(\omega, \beta) f_k(\omega, \beta) f_k^*(\omega, \beta) d\beta \quad (5.105)$$

Par ailleurs, toujours en vertu de la linéarité, la houle étant un signal gaussien, la réponse de la structure est également gaussienne. On peut donc lui appliquer l'exploitation statistique que l'on a déjà mise en œuvre pour la houle au chapitre 2. Par exemple :

Le calcul des moments du spectre :

$$m_{kn} = \int_0^\infty \omega^n S_{X_k}(\omega) d\omega \quad (5.106)$$

d'où l'on tire l'écart type du processus $X_k(t)$:

$$\sigma_{X_k} = \sqrt{m_{k0}} \quad (5.107)$$

sa période moyenne up-crossing :

$$T_{kZ} = 2\pi \sqrt{\frac{m_{k0}}{m_{k2}}} \quad (5.108)$$

et le paramètre de largeur de bande :

$$\epsilon_k^2 = 1 - \frac{m_{k2}^2}{m_{k0} m_{k4}} \quad (5.109)$$

d'où l'on déduit si la loi de Rayleigh s'applique à la distribution des maxima. On peut alors calculer le maximum moyen attendu du processus $X_k(t)$ au cours d'un état de mer de durée T par :

$$\overline{X_{k \max}} = \left[\sqrt{2 \ln \frac{T}{T_{kZ}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln \frac{T}{T_{kZ}}}} \right] \sqrt{m_{k0}} \quad (5.110)$$

Attention à la disparition du facteur 2 par rapport à la relation (2.46) du chapitre 2, où l'on s'intéressait au crête à creux. Ici c'est la valeur maximale du signal (par rapport à la valeur moyenne) que l'on considère.

On peut appliquer la même démarche à toute quantité qui se relie de façon linéaire à la houle incidente: efforts d'excitation (pour une structure fixe), élévation relative de surface libre en un point (pour étudier les problèmes d'airgap), tension dans un tendon de TLP, etc. On établit la fonction de transfert complexe, on en déduit le spectre de la quantité considérée, puis son écart type et sa valeur extrême prise au cours de l'état de mer.

5.6 Résolution temporelle directe des équations du mouvement

Le principe de superposition que l'on vient d'exposer suppose que tous les termes des équations du mouvement sont linéaires, aussi bien ceux traduisant le chargement hydrodynamique lié à la houle que ceux liés à la dynamique propre du corps en eau calme. Il est des situations où l'on souhaite par exemple introduire un amortissement d'origine visqueuse, quadratique par rapport à la vitesse propre, ou des efforts d'ancrage non linéaires, et intégrer les équations du mouvement pas à pas dans le temps. Le principe d'additivité continue à s'appliquer sans problème aux efforts d'excitation, dès lors que le mouvement reste «petit». Mais

des difficultés surgissent lorsqu'on veut exprimer les efforts de radiation puisqu'on ne sait le faire que si l'on connaît le contenu fréquentiel du mouvement, en raison de la dépendance vis à vis de la pulsation des masses ajoutées et amortissements de radiation.

Cette variation avec la pulsation des masses ajoutées et amortissements traduit le fait que les efforts de radiation ne dépendent pas seulement de l'accélération et de la vitesse instantanées de la structure, mais aussi de leur histoire, l'effet mémoire étant dû à la présence de la surface libre. Il faut donc exprimer les efforts de radiation à travers la vitesse passée de la structure, par le biais de «fonctions de retardement». Plus précisément, si l'on considère l'équation du mouvement pour le degré de liberté i , mise jusqu'à maintenant sous la forme :

$$\sum_{j=1}^6 \left\{ [M_{ij} + M_{aij}(\omega)] \ddot{X}_j + B_{ij}(\omega) \dot{X}_j + K_{ij} X_j \right\} = F_i(t) \quad (5.111)$$

où M_{aij} et B_{ij} dépendent de la pulsation ω , on lui substitue la forme plus générale, qui ne présuppose pas un mouvement harmonique à la pulsation ω :

$$\sum_{j=1}^6 \left\{ [M_{ij} + M_{aij}(\infty)] \ddot{X}_j + \int_{-\infty}^t \dot{X}_j(\tau) R_{ij}(t - \tau) d\tau + K_{ij} X_j \right\} = F_i(t) \quad (5.112)$$

$M_{aij}(\infty)$ est la masse ajoutée calculée à pulsation infinie, soit en affichant $\varphi_{Rj} = 0$ à la surface libre. Les masses ajoutées $M_{aij}(\omega)$ et amortissements $B_{ij}(\omega)$ sont liés aux fonctions de retardement $R_{ij}(t)$ par les relations :

$$M_{aij}(\omega) = M_{aij}(\infty) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} R_{ij}(t) \sin \omega t dt \quad (5.113)$$

$$B_{ij}(\omega) = \int_0^{\infty} R_{ij}(t) \cos \omega t dt \quad (5.114)$$

et inversement :

$$R_{ij}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{ij}(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (5.115)$$

Si l'on connaît les termes de la matrice des amortissements de radiation pour toutes les valeurs de la pulsation ω , de zéro à l'infini, on peut donc, par la relation ci-dessus, en déduire les fonctions de retardement $R_{ij}(t)$ et intégrer les équations du mouvement dans le domaine temporel.

A noter qu'il existe des codes de diffraction-radiation qui travaillent directement dans le domaine temporel, à l'aide de fonctions de Green instationnaires. Un avantage est que l'on peut alors s'affranchir de la linéarisation de la condition de glissement sur la carène, donc avoir des grandes variations de surface mouillées, tant que les conditions à la surface libre restent «linéarisables». Ces codes ne sont guère passés dans le domaine industriel.

5.7 Validité et limitations de la théorie linéaire

De manière générale (et un peu évasive) on peut écrire que la théorie linéaire fournit d'excellents résultats lorsque les hypothèses inhérentes sont respectées ; ou, inversement, que

les désaccords éventuels entre calcul et expérience sont imputables au non-respect d'une de ces hypothèses. On les rappelle ici :

- rôle négligeable des effets visqueux ;
- houle de faible cambrure ;
- grandes dimensions de la structure étudiée, devant l'amplitude de la houle, et devant celle de ses mouvements propres.

Il faut aussi réaliser que la théorie linéaire ne rend compte que des phénomènes (efforts, mouvements) prenant place aux fréquences de la houle. Elle est incapable de donner accès aux mouvements prenant place aux fréquences propres, lorsque ces fréquences se situent en dehors des fréquences de houle. Pour appréhender ces comportements il faut mettre en jeu des phénomènes non-linéaires et pousser l'analyse hydrodynamique au moins jusqu'au deuxième ordre d'approximation.

Dans ce qui suit on essaye de rendre plus concrètes ces considérations, en les illustrant par des cas particuliers.

5.7.1 Efforts sur les structures fixes

Ce cas est relativement peu fréquent, les structures offshore de grandes dimensions étant le plus souvent flottantes. Comme structures fixes de grande taille on peut citer les plates-formes gravitaires en béton de la mer du Nord, ou celle d'Hibernia au large de Terre Neuve.

Pour de telles structures l'hypothèse de grandes dimensions devant l'amplitude de la houle est assez bien respectée. Les efforts de traînée sur les colonnes des plates-formes gravitaires peuvent néanmoins devenir sensibles si l'écoulement s'y sépare, soit donc si l'amplitude de houle excède le rayon. Ces efforts peuvent être rajoutés a posteriori, même si le choix du coefficient de traînée pose quelque problème. Etant déphasés de 90 degrés par rapport aux efforts d'inertie, ils contribuent peu aux pics d'effort.

Un autre problème éventuel peut être lié à une forte cambrure de la houle incidente, ou à une théorie de houle mal adaptée si la profondeur d'eau est faible vis à vis de la longueur d'onde. En un tel cas on peut s'attendre à ce que les harmoniques d'ordre supérieur deviennent rapidement appréciables lorsque la cambrure de houle augmente. Il peut donc être indiqué de calculer les efforts de diffraction de deuxième ordre, apparaissant à la pulsation double. Ces efforts sont étudiés au chapitre suivant.

Enfin une structure dont la partie volumineuse est profondément immergée peut être davantage sensible aux composantes de deuxième ordre de la houle incidente, qui décroissent lentement avec l'immersion (composantes en mode différence), qu'aux composantes fondamentales, confinées au voisinage de la surface libre. Ces ondes «liées» ont été décrites au chapitre 3.

5.7.2 Réponse à la houle des structures flottantes

De manière quasi générale les périodes propres des mouvements horizontaux des structures flottantes se situent bien au-delà des périodes de houle, en raison de la faible raideur des ancrages. L'étude des comportements résonnants, dits de dérive lente, qui apparaissent à ces longues périodes passe par le calcul des efforts de deuxième ordre. Ces mouvements sont étudiés au chapitre suivant.

La théorie linéaire ne permet d'appréhender que la composante de réponse à la houle, aux mêmes fréquences, qui se trouve superposée à celle de dérive lente, mais qui affecte les

six degrés de liberté. Pour des structures massives comme les barges et les FPSO la théorie linéaire s'applique en général très bien à la prédiction de cette composante. Des exemples de comparaison entre mouvements calculés et mesurés sont fournis par les figures 5.15 et 5.16. Elles présentent les fonctions de transfert (module et phase) de trois flotteurs : tanker, semi-submersible et barge, en houle de face (figure 5.15) et houle de travers (figure 5.16). On y note un bon accord sauf en ce qui concerne le roulis du tanker et de la barge, à la résonance. Pour le roulis en effet les amortissements de radiation sont faibles, et c'est la séparation de l'écoulement aux bouchains qui vient limiter la résonance, surtout si ceux-ci présentent des angles vifs. La technique habituellement utilisée est de rajouter, dans l'équation du mouvement de roulis, un terme d'amortissement quadratique par rapport à la vitesse en roulis (du type $B_Q \dot{\alpha} |\dot{\alpha}|$).

A l'inverse du roulis les mouvements de pilonnement et tangage de la barge et du tanker sont fortement amortis par la radiation. Cela n'est cependant pas le cas général. Par exemple l'amortissement de radiation en pilonnement d'une structure mono-colonne de grand tirant d'eau, genre bouée SPAR, est tout à fait négligeable. Comme pour le roulis il devient nécessaire d'introduire d'autres mécanismes amortisseurs (frottement, séparation à la base, forces de traînée sur les lignes d'ancrage, etc.) pour estimer correctement son mouvement de pilonnement à la résonance.

Un exemple est fourni par la figure 5.17, qui présente la fonction de transfert en pilonnement, déterminée expérimentalement par des essais sur houles régulières, d'une bouée de 8 m de diamètre et 8 m de tirant d'eau. On note que la fonction de transfert à la résonance décroît de 5 à 2,5 lorsque l'amplitude de houle passe de 0,1 à 0,6 m. Il est probable que cette variation de la fonction de transfert est en grande partie due à la participation des effets visqueux à l'amortissement du mouvement de pilonnement. De fait on note que le pic de la fonction de transfert décroît à peu près comme la racine carrée de l'amplitude, ce qui suggère un amortissement quadratique.

En dehors de ce problème d'amortissement des comportements résonnants, il ne faut pas perdre de vue l'hypothèse de faible amplitude de la houle (et faibles mouvements) vis à vis des dimensions propres de la structure. Ce critère est rapidement mis en défaut par les structures de petites dimensions, comme les bouées de chargement dont l'étude du comportement est en fait bien plus difficile que celle des tankers qui y sont amarrés.

Un dernier commentaire : des résultats tels que ceux présentés sur la figure 5.17 peuvent laisser croire que les fonctions de transfert expérimentales ont tendance à diminuer lorsque, à période et incidence de houle données, l'amplitude de houle augmente. Et que les fonctions de transfert calculées, à l'aide de codes de diffraction-radiation d'où sont absents les amortissements visqueux, constituent donc une sorte de majorant. C'est souvent le cas, mais il y a des contre-exemples.

Un de ces contre-exemples est le clapotis qui prend place devant un ensemble de 4 cylindres (comme illustré figure 5.11) lorsque la longueur d'onde vaut à peu près deux fois l'entraxe. Les champs de vagues diffractés par les colonnes avant et arrière sont alors en phase et il en résulte un mouvement important de la surface libre.

On présente ici un résultat obtenu lors d'essais en bassin sur un modèle de plate-forme sur lignes tendues, consistant, à la traversée de la surface libre, en 4 colonnes de 26,4 m de diamètre pour un entraxe de 75 m. L'élévation de surface libre est mesurée en divers points, en particulier un peu en amont du point milieu entre les deux colonnes frontales. A la période

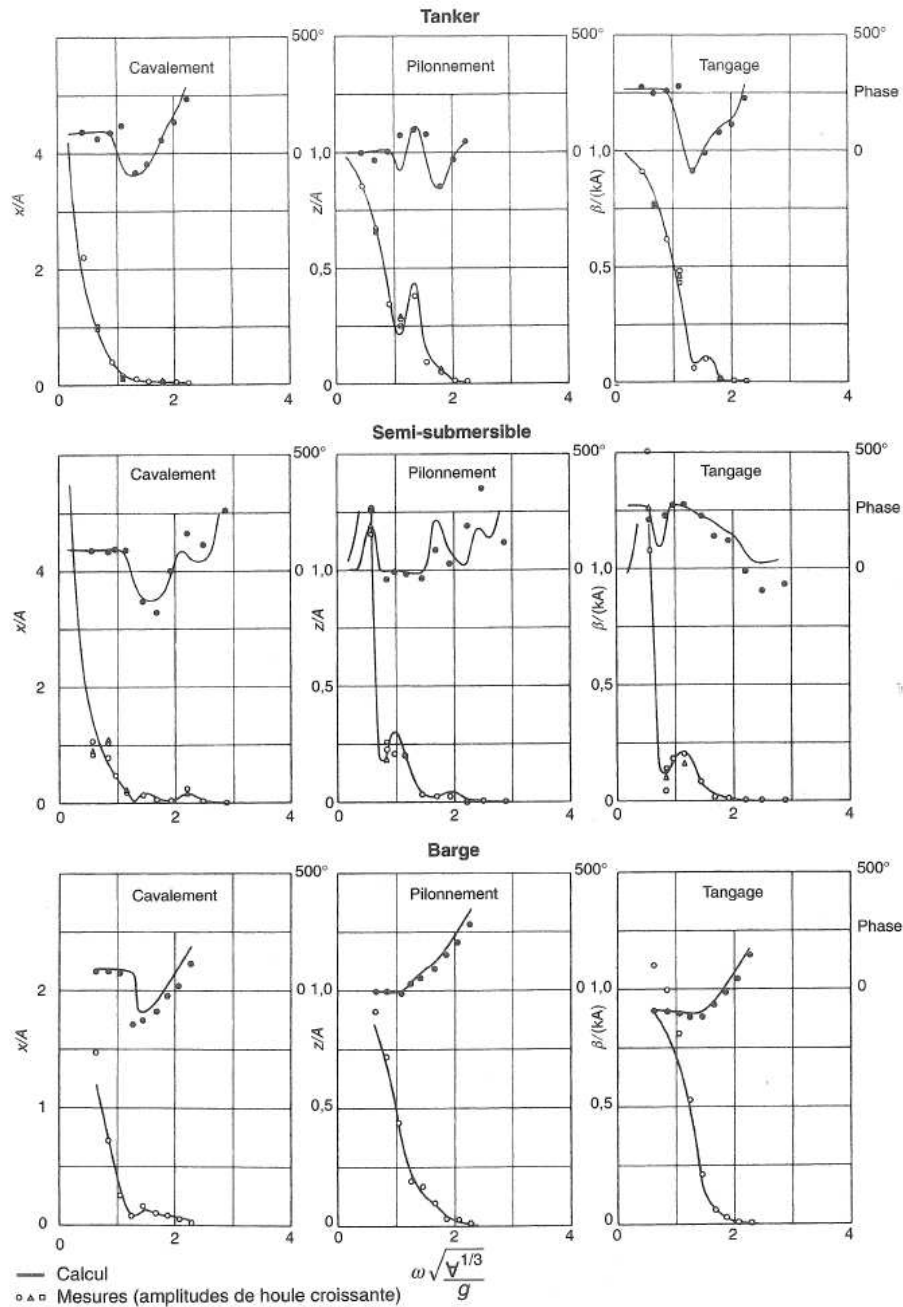


FIG. 5.15 – Tanker, plate-forme semi-submersible et barge par houle de face. Fonctions de transfert (modules et phases) en cavalement, pilonnement et tangage.

de houle critique de 10 secondes (156 m de longueur d’onde), et pour de faibles amplitudes, la fonction de transfert mesurée du mouvement local de surface libre est égale à 1,8, en bon accord avec la théorie linéaire. A l’amplitude de 7,5 m (soit une cambrure H/L de 10 %), des impacts se produisent sous le pont de la plate-forme, à 24 m au dessus du niveau moyen de surface libre, soit une fonction de transfert supérieure à 3 (figure 5.18).

Des phénomènes analogues sont observés pour des barges (figure 5.19), FPSOs ou digues par houle de travers : de fortes surélévations de surface libre, ou «run-ups», au milieu du bordé, bien supérieures à la prédiction de la théorie linéaire. Les interactions non-linéaires

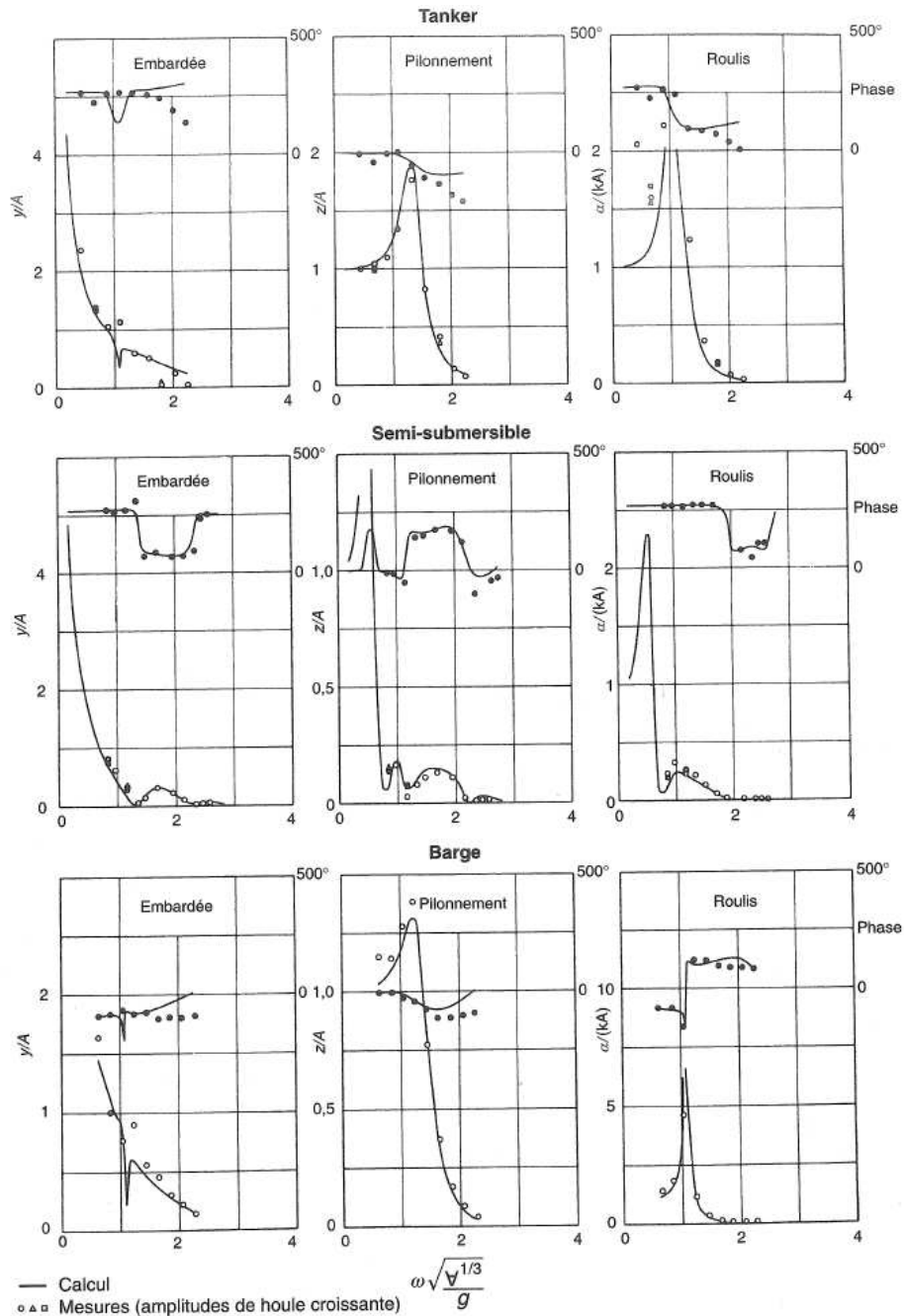


FIG. 5.16 – Tanker, plate-forme semi-submersible et barge par houle de travers. Fonctions de transfert (modules et phases) en cavalemt, pilonnement et tangage.

(tertiaires) entre houle incidente et houle réfléchié sont apparemment à l'origine de ces fortes surélévations (voir le paragraphe 3.4.2).

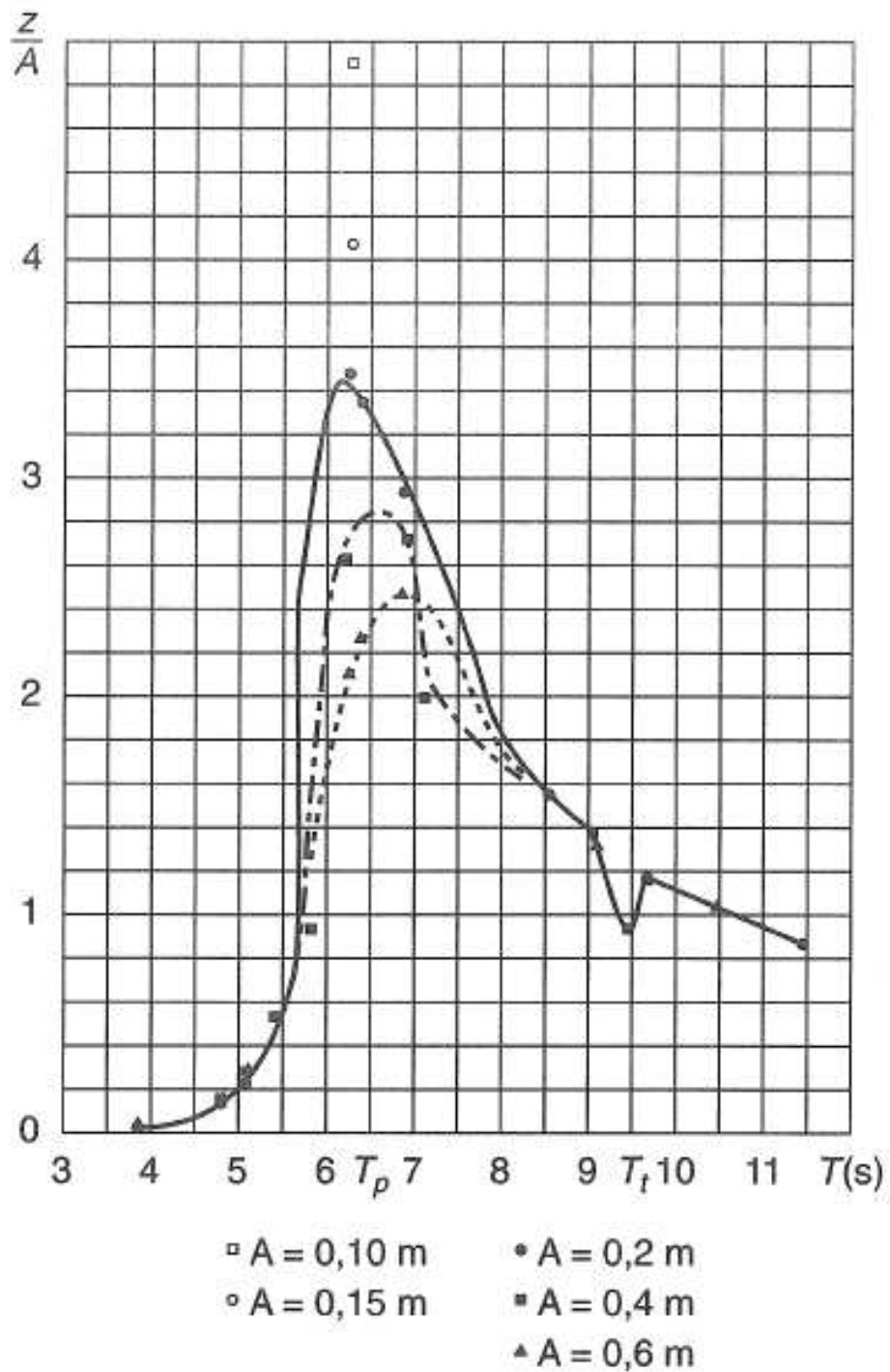


FIG. 5.17 – Réponse en pilonnement d'une bouée cylindrique de tirant d'eau égal à son diamètre. Fonctions de transfert expérimentales pour différentes amplitudes de houle.

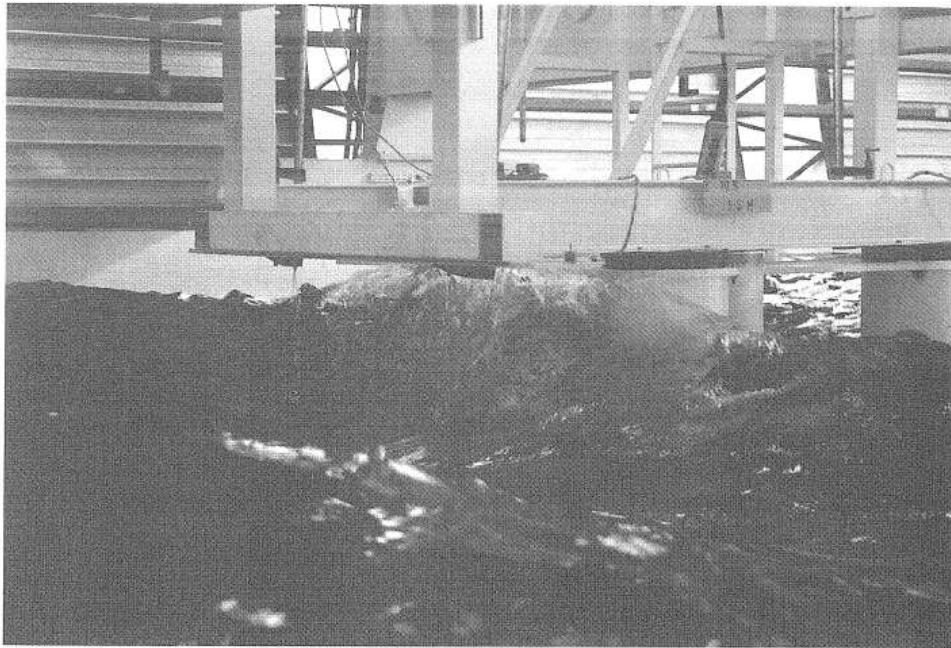


FIG. 5.18 – Essais à l'Ecole Centrale de Nantes sur un modèle de TLP. Impacts sous le pont en houle régulière de longueur d'onde égale à deux fois l'entraxe.



FIG. 5.19 – Run-up au milieu du bordé d'une barge.

Chapitre 6

LES GRANDS CORPS : EFFETS DE DEUXIEME ORDRE

6.1 Introduction

Au chapitre précédent on a étudié l'interaction de la houle avec les structures massives, dans le cadre d'une théorie linéarisée : l'amplitude et la cambrure des vagues sont supposées très petites, les phénomènes étudiés (efforts, mouvements) prennent place à la pulsation fondamentale de la houle.

Les observations, au réel ou lors d'essais en bassin, convainquent facilement qu'efforts, et mouvements, n'apparaissent pas seulement aux fréquences de la houle. Il s'y superpose des efforts moyens, dits de dérive, que doivent contrer les ancrages. Des mouvements résonnants apparaissent aux périodes propres du système mécanique formé par la structure étudiée et ses ancrages, en particulier des mouvements lents dans le plan horizontal (cf fig. 1.15 à 1.17). Pour des systèmes raides comme les plates-formes sur lignes tendues (en ce qui concerne leurs mouvements de pilonnement, roulis et tangage), des comportements résonnants dits de *springing* sont aussi susceptibles d'apparaître dans des états de mer de période de pic environ double des périodes propres en pilonnement, roulis et tangage (cf fig. 1.19).

Il se trouve que les efforts excitateurs responsables de ces comportements sont facilement mis en évidence dans le cadre d'une théorie au deuxième ordre.

Par «deuxième ordre» on entend que les paramètres physiques (élévation de surface libre, potentiel des vitesses, efforts, mouvements) sont développés sous la forme :

$$F = F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)} + \varepsilon^3 F^{(3)} + \dots \quad (6.1)$$

où ε est un petit paramètre qui se relie linéairement à l'amplitude de la houle (dans la théorie de Stokes c'est la cambrure kA). $F^{(0)}$ correspond à l'état de repos, ou au courant seul. $\varepsilon F^{(1)}$ est le premier ordre d'approximation : la théorie linéarisée. $\varepsilon^2 F^{(2)}$ est le deuxième ordre d'approximation, qui nous intéresse dans ce chapitre. Comme on le verra plus loin les quantités de deuxième ordre sont reliées de façon quadratique à celles du premier ordre. Il s'ensuit que, si la houle considérée est régulière, de pulsation ω et d'amplitude A , les efforts de deuxième ordre vont apparaître à la pulsation double (2ω) et à la pulsation nulle (soit des efforts moyens), et être proportionnels au carré A^2 de l'amplitude de la houle incidente. En houle irrégulière, ils vont prendre place aux sommes deux à deux ($\omega_i + \omega_j$) et aux différences ($\omega_i - \omega_j$) des pulsations porteuses de la houle. Un large domaine de fréquences se trouve ainsi couvert (figure 6.1).

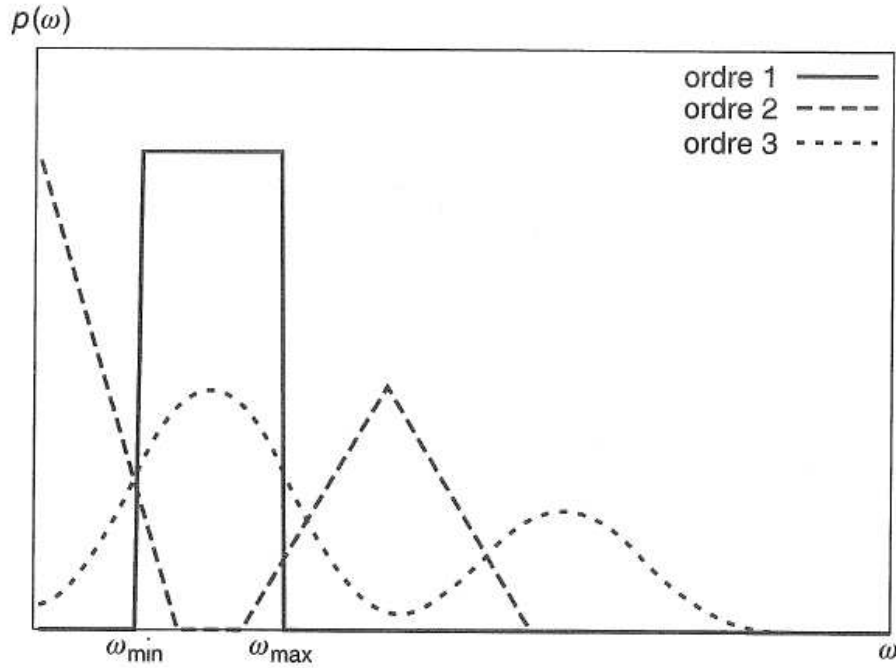


FIG. 6.1 – On suppose les pulsations de houle uniformément réparties dans l'intervalle $[\omega_{\min} \ \omega_{\max}]$. Le deuxième ordre fait apparaître les pulsations $|\omega_i \pm \omega_j|$, dont les densités de probabilité prennent la forme des deux triangles, de 0 à $\omega_{\max} - \omega_{\min}$ (mode différence) et de $2\omega_{\min}$ à $2\omega_{\max}$ (mode somme). On a aussi représenté la densité de probabilité de $|\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k|$, associée à des effets de troisième ordre.

Dans ce chapitre on commence par le cas de la houle régulière, où on étudie successivement les efforts de dérive et ceux de pulsation double. On passe ensuite au cas de la houle bichromatique (deux pulsations ω_1 et ω_2), cadre théorique générique pour aborder le cas suivant de la houle irrégulière. Enfin on considère le problème pratique de la prédiction numérique des mouvements lents des structures ancrées, pour laquelle la difficulté réside autant dans l'évaluation des amortissements que dans celle des efforts excitateurs.

6.2 Efforts de dérive sur houle régulière

6.2.1 Efforts moyens sur une digue

On considère le cas idéal d'une houle régulière se réfléchissant intégralement sur une digue en profondeur infinie (fig. 6.2).

Au premier ordre d'approximation l'élévation de surface libre s'écrit :

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}(x,t) &= A \cos(kx - \omega t) + A \cos(-kx - \omega t) \\ \eta^{(1)}(x,t) &= 2A \cos kx \cos \omega t \end{aligned} \quad (6.2)$$

et le potentiel des vitesses est :

$$\Phi^{(1)}(x,z,t) = -\frac{2Ag}{\omega} e^{kz} \cos kx \sin \omega t \quad (6.3)$$

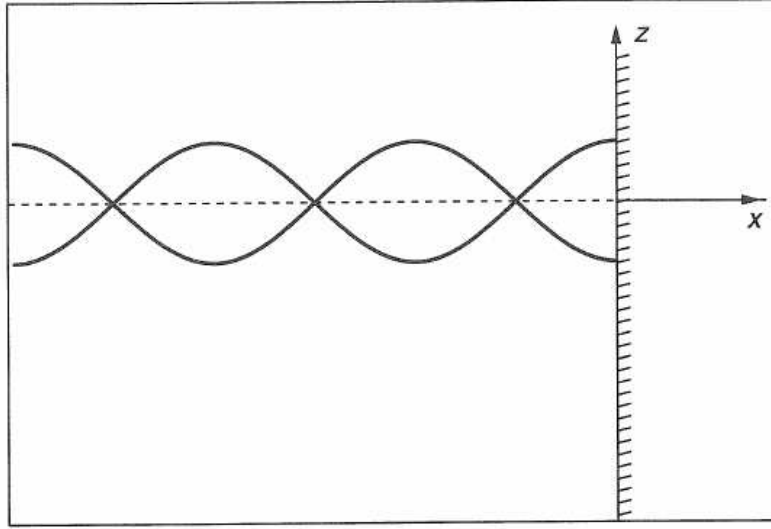


FIG. 6.2 – Clapotis devant une digue.

Les efforts appliqués sur la digue (par unité de longueur) s'écrivent :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\eta(t)} -\rho \left(\Phi_t + g z + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right) dz \quad (6.4)$$

avec :

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \dots \quad \Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots$$

où $\eta^{(1)}$ est d'ordre ε , $\eta^{(2)}$ d'ordre ε^2 , etc.

De même : $F = F^{(0)} + F^{(1)} + F^{(2)} + \dots$, où $F^{(0)}$ est la poussée hydrostatique en eau calme.

Ne retenant que les termes d'ordre 2, on obtient :

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= -\rho \left(\Phi_t^{(1)} z + \frac{1}{2} g z^2 \right) \Big|_0^{\eta^{(1)}} - \rho \int_{-\infty}^0 \left(\Phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \rho g \eta^{(1)2} - \rho \int_{-\infty}^0 \left(\Phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} \Phi_z^{(1)2} \right) dz \end{aligned}$$

On a vu au chapitre 3 que $\Phi^{(2)}$ prend place à la pulsation 2ω (et obtenu le résultat intéressant que dans ce cas particulier de houle stationnaire il ne dépend pas des variables d'espace). Il ne participe donc pas aux efforts moyens qui s'écrivent (à cet ordre d'approximation) :

$$\begin{aligned} \overline{F^{(2)}} &= \frac{1}{2} \rho g 4 A^2 \overline{\cos^2 \omega t} - \int_{-\infty}^0 2 A^2 g k e^{2kz} \overline{\sin^2 \omega t} dz \\ \overline{F^{(2)}} &= \rho g A^2 - \frac{1}{2} \rho g A^2 = \frac{1}{2} \rho g A^2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

On obtient donc un effort moyen proportionnel au carré de l'amplitude de la houle. Cet effort a deux composantes : la première localisée à l'intersection avec la surface libre, dirigée vers l'intérieur de la digue, et la seconde résultant de l'intégration du terme $-1/2 \rho (\nabla \Phi)^2$ de

la pression, dirigée vers le fluide. Dans le cas de la digue la première vaut deux fois la seconde en module et l'effort résultant est dirigé dans le sens attendu.

Pour une houle d'incidence β on obtient comme effort moyen :

$$\overline{F^{(2)}} = \frac{1}{2} \rho g A^2 \cos^2 \beta \quad (6.6)$$

6.2.2 Effort de dérive sur un cylindre vertical

On a, au chapitre précédent, donné l'expression du potentiel des vitesses. On peut alors effectuer de façon analytique le calcul de la valeur moyenne de l'effort horizontal :

$$F_d = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ -\frac{1}{2} \rho g \int_0^{2\pi} \eta^{(1)2} R_0 \cos \theta d\theta + \rho \int_{-h}^0 dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \nabla \Phi^{(1)2} R_0 \cos \theta d\theta \right\}$$

$$F_d = -\frac{1}{4} \rho \frac{\omega^2}{g} \int_0^{2\pi} \varphi \varphi^* R_0 \cos \theta d\theta + \frac{1}{4} \rho \int_{-h}^0 dz \int_0^{2\pi} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi^* R_0 \cos \theta d\theta$$

où $\Phi^{(1)}(R, z, \theta, t) = \Re \{ \varphi(R, z, \theta) e^{-i\omega t} \}$, φ^* étant le complexe conjugué.

Tous calculs faits on obtient :

$$F_d = \rho g A^2 R_0 \frac{4}{\pi^2 (kR_0)^3} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[1 - m(m+1)/(k^2 R_0^2)]^2}{(J_m^2 + Y_m^2)(J_{m+1}^2 + Y_{m+1}^2)} \quad (6.7)$$

où les fonctions de Bessel sont à évaluer en kR_0 .

La figure 6.3 montre l'effort de dérive adimensionnel $F_d/(\rho g R_0 A^2)$ en fonction du nombre d'onde adimensionnel kR_0 , pour trois profondeurs d'eau : infinie et égale à trois fois ou une fois le rayon.

Quand la longueur d'onde devient petite devant le rayon, le cylindre réfléchit intégralement la houle. De l'analyse faite pour le cas de la digue on déduit que l'effort de dérive tend vers :

$$F_{das} = \frac{1}{2} \rho g A^2 R_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \rho g A^2 R_0 \quad (6.8)$$

A l'inverse aux grandes longueurs d'onde le cylindre est complètement transparent et la force de dérive est quasi nulle. Elle se comporte asymptotiquement comme :

$$\frac{F_d}{\rho g R_0 A^2} \simeq \frac{5\pi^2}{16} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) (kR_0)^3 \quad \text{pour } kR_0 \rightarrow 0 \quad (6.9)$$

La figure 6.4 montre que c'est là une bonne approximation pour $kR_0 < 0,5$, et que la valeur asymptotique de $2/3$, aux grands nombres d'onde, fournit une bonne estimation dès que kR_0 dépasse 1.

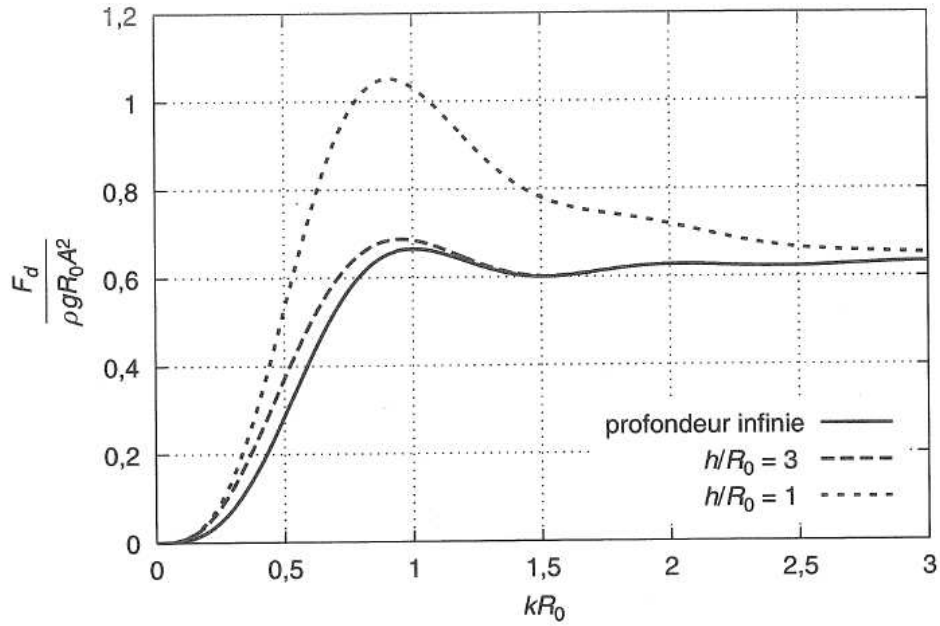


FIG. 6.3 – Effort de dérive sur un cylindre vertical, en profondeur infinie, et pour deux rapports h/R_0 de la profondeur au rayon : $h/R_0 = 3$ et $h/R_0 = 1$.

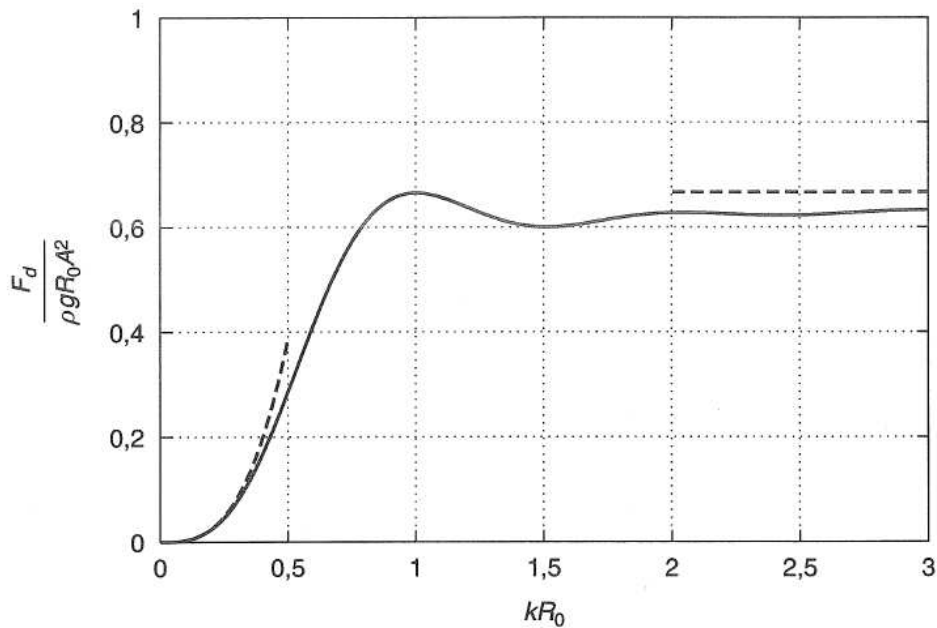


FIG. 6.4 – Effort de dérive sur un cylindre vertical, en profondeur infinie, et valeurs asymptotiques pour $kR_0 \rightarrow 0$ et $kR_0 \rightarrow \infty$.

6.2.3 Efforts de dérive sur une structure flottante

Dans le cas d'une structure flottante il est toujours possible d'exprimer les efforts de dérive par intégration de la pression, en ne retenant que les termes de deuxième ordre. Par rapport au cas de la structure fixe la situation se complique quelque peu à cause du mouvement qui

entraîne l'apparition de termes supplémentaires. On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{F}_d = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} \rho g \left(\eta^{(1)2} - 2\eta^{(1)} \zeta^{(1)} \right) \vec{n}_0 d\Gamma + \vec{A}^{(1)} \wedge \iint_{S_{C_0}} -\rho \Phi_t^{(1)} \vec{n}_0 dS \right. \\ \left. + \iint_{S_{C_0}} -\rho \left[\frac{1}{2} \left(\nabla \Phi^{(1)} \right)^2 + \overline{P_0 \vec{P}^{(1)}} \cdot \nabla \Phi_t^{(1)} \right] \vec{n}_0 dS \right\} \quad (6.10) \end{aligned}$$

où $\zeta^{(1)}$ représente le mouvement vertical de la structure à la flottaison Γ_0 , $\vec{A}^{(1)}$ le mouvement angulaire, et $\overline{P_0 \vec{P}^{(1)}}$ le mouvement d'un point P lié à la carène (on suppose ici que la carène est verticale à la surface libre). Le vecteur normal \vec{n}_0 est orienté vers l'intérieur de la carène.

Il est clair que dans cette expression $\Phi^{(1)}$ désigne le potentiel total de l'écoulement (incident + diffracté + radié).

Cette expression fournit les composantes en cavalement, embardée et pilonnement, la dernière devant être corrigée de termes hydrostatiques.

On établit une expression similaire pour les moments de dérive en lacet, roulis et tangage, les deux derniers devant également être corrigés de termes hydrostatiques.

Cette expression des efforts de dérive est connue sous le nom de **formulation de Pinkster**, ou de **champ proche** (*near field method*). Son évaluation à l'aide des codes de diffraction-radiation est quelquefois délicate, principalement pour les raisons suivantes :

- le calcul de l'intégrale sur la ligne de flottaison nécessite la connaissance du potentiel en $z = 0$ et en un grand nombre de points pour une bonne précision numérique ;
- est aussi nécessaire une bonne évaluation du champ de vitesses sur la carène, souvent délicate au voisinage des angles vifs ;
- les différents termes de l'expression ont souvent tendance à se compenser mutuellement, aux dépens évidemment de la précision du résultat final.

Par des considérations sur la variation de quantité de mouvement du volume fluide limité par la carène et une surface de contrôle Σ , on établit une deuxième formulation des efforts de dérive (Maruo, 1960) :

$$\vec{F}_d = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ - \int_{\Gamma_\Sigma} \frac{1}{2} \rho g \eta^{(1)2} \vec{n} d\Gamma + \iint_{\Sigma} \rho \left[\frac{1}{2} \left(\nabla \Phi^{(1)} \right)^2 \vec{n} - \nabla \Phi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial n} \right] dS \right\} \quad (6.11)$$

où Γ_Σ est l'intersection de Σ avec le plan de surface libre.

Cette expression ne s'applique qu'aux composantes en cavalement et embardée. On établit une expression analogue pour le moment de dérive en lacet (Newman, 1967).

L'intérêt de cette formulation (dite de **Maruo-Newman** ou de **champ lointain**) est que l'on peut éloigner à l'infini la surface de contrôle et effectuer une partie des calculs de façon analytique à partir de l'expression du champ lointain du potentiel. On obtient ainsi :

Pour les composantes horizontales :

$$\begin{pmatrix} F_{dx} \\ F_{dy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \rho g A^2 \frac{1}{k} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) \left\{ \int_0^{2\pi} H(\theta) H^*(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta + 2\pi \Re(H(\beta)) \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right\} \quad (6.12)$$

Pour le moment en lacet :

$$C_{dz} = \frac{1}{2} \rho g A^2 \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) \Im \left\{ 2 H'^*(\beta) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(\theta) H'^*(\theta) d\theta \right\} \quad (6.13)$$

où $H(\theta)$ est la fonction de Kochin introduite au paragraphe 5.2.2. La précision numérique offerte par cette formulation est en général bien meilleure que celle obtenue en intégrant directement la pression. Malheureusement elle ne donne accès qu'à trois composantes sur six. Une autre limitation est que, dans le cas de plusieurs structures en interaction hydrodynamique, elle ne peut donner accès aux efforts de dérive agissant sur chaque structure séparément.

Enfin, elle ne peut être étendue au calcul des efforts de mode différence en houle bichromatique, que l'on aborde plus loin.

Une troisième méthode, dite «Lagally» (parce que inspirée du théorème de Lagally) et implémentée dans *DIODORE*, est réservée aux codes basés sur la méthode des singularités. Lorsqu'une densité de sources seules est utilisée, on établit que les efforts de dérive horizontaux s'expriment aussi par :

$$\vec{F}_d = -\rho \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \iint_{S_{c_0}} \sigma \vec{V} dS \right\} \quad (6.14)$$

où σ est la densité de source de la partie perturbée de l'écoulement (diffraction + radiation) et la vitesse \vec{V} est :

$$\vec{V} = \nabla \Phi_I + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{c_0}} \sigma(Q,t) \nabla_P H(P,Q) dS_Q \quad (6.15)$$

H étant la partie régulière de la fonction de Green.

Cette formulation donne également accès au moment de dérive en lacet et, pour un corps complètement immergé, aux 3 autres composantes des efforts de dérive. Elle est valable en configuration multi-corps, les vitesses perturbées résultant des autres structures devant alors être rajoutées à la vitesse incidente $\nabla \Phi_I$.

La coïncidence des efforts de dérive calculés suivant les différentes formulations est un bon indicateur de convergence numérique. La plupart des codes industriels de diffraction radiation calculent les efforts de dérive suivant les méthodes *near field* et *far field*.

Caractères généraux des efforts de dérive

La formulation de Maruo-Newman met en évidence que les efforts de dérive horizontaux sont directement liés au champ de vagues rayonné et réfléchi par la structure. En conséquence les efforts de dérive sont nuls aux grandes périodes où la structure est transparente à la houle.

A l'inverse, aux très courtes périodes, la structure reste immobile, la houle est réfléchie comme par une digue courbe, et les efforts de dérive horizontaux (normalisés par le carré de l'amplitude de la houle incidente) tendent vers une valeur asymptotique non nulle :

$$\vec{F}_{das} = \frac{1}{2} \rho g A^2 \int_{\Gamma_e} \left[\vec{n}_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right]^2 \vec{n}_0 d\Gamma \quad (6.16)$$

où l'on suppose toujours que la carène coupe la surface libre à angle droit. \vec{n}_0 est la normale intérieure à la carène et Γ_e la partie du contour de flottaison exposée à la houle (fig. 6.5). On a vu dans le cas du cylindre vertical que cette valeur asymptotique fournissait un bon ordre de grandeur des efforts de dérive. Par exemple pour une barge ou un tanker, une bonne

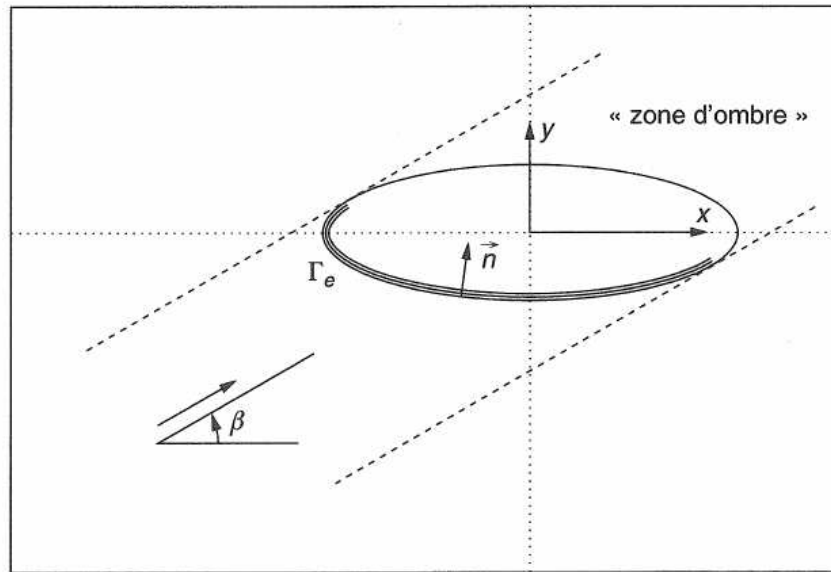


FIG. 6.5 – Contour de flottaison Γ_e exposé à la houle.

estimation de l'effort de dérive en embardée est $1/2 \rho g A^2 L \sin^2 \beta$, où L est la longueur et β l'incidence de la houle par rapport à l'axe longitudinal.

Dans la zone intermédiaire entre ces deux extrêmes on observe des comportements variables avec des pics souvent associés aux périodes propres (où le champ de vague radié est important) ou, pour les semi-submersibles, à des effets d'interférence entre les colonnes (les champs de vagues diffractés par les différentes colonnes se trouvant en phase, ce qui se produit pour un entraxe égal à une demi-longueur d'onde). Une faible profondeur d'eau conduit aussi à un accroissement des efforts de dérive, par rapport au cas de profondeur infinie.

Les efforts de dérive en pilonnement sont en général sans grand intérêt, sauf pour quelques situations spécifiques. Un exemple, dans un autre domaine, est la tenue d'immersion des sous-marins qui, en évolution sous houle, se trouvent attirés vers la surface libre. Ces efforts de dérive verticaux ont peu à voir avec le champ de vagues rayonné et sont principalement dus à la décroissance exponentielle de la cinématique induite par la houle avec la cote verticale. Il en résulte que la pression moyenne, associée au terme $-1/2 \rho (\nabla \Phi)^2$ de la relation de Bernoulli, est plus faible (en valeur algébrique) au dessus du sous-marin qu'en dessous, d'où un effort global ascendant.

En ce qui concerne les moments de dérive en roulis et tangage, la situation est plus complexe puisqu'ils résultent d'efforts locaux horizontaux et verticaux, et qu'ils s'apparentent donc à la fois aux efforts de dérive en cavalemt et embardée, et à ceux en pilonnement. Dans le cas le plus général ils ne peuvent être calculés que par la formulation de champ proche, les effets de diffraction radiation étant dûment pris en compte.

6.2.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

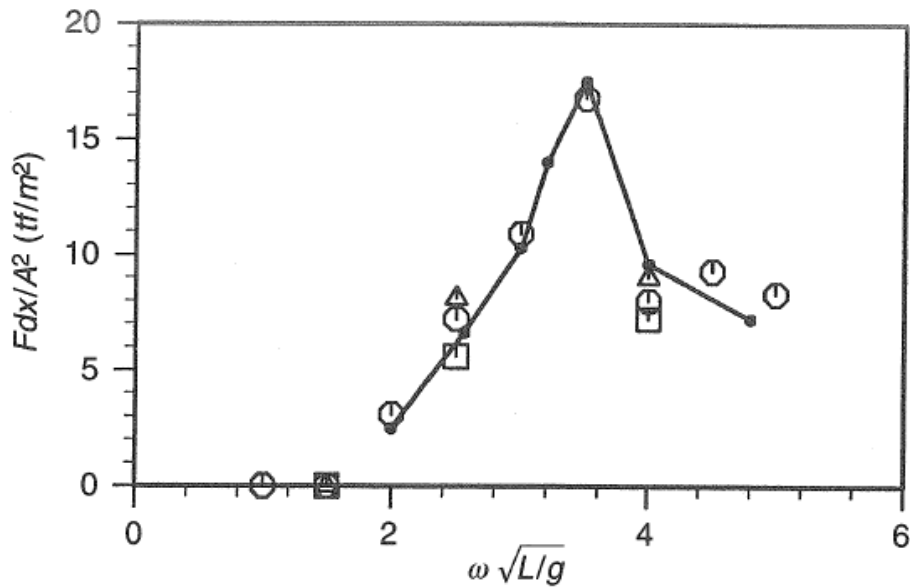


FIG. 6.6 – Effort de dérive en cavalemt sur un tanker. Houle de face. Valeurs mesurées (Δ , \circ , \square , par amplitudes de houle croissantes) et calculées.

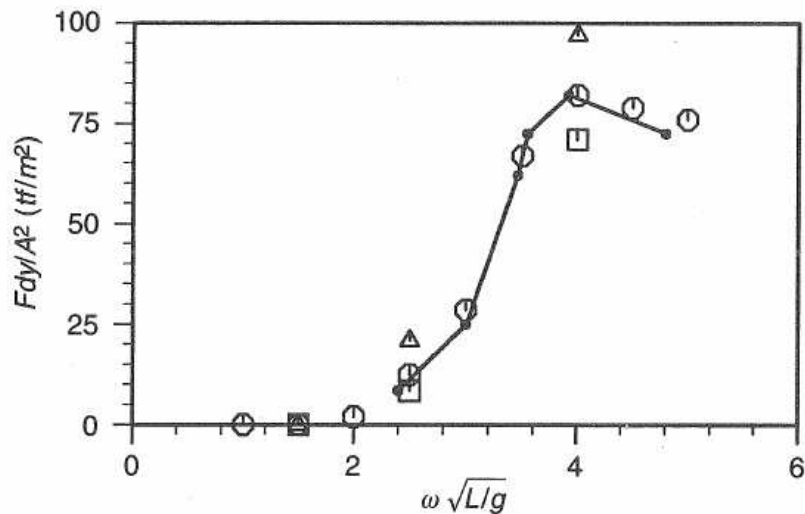


FIG. 6.7 – Effort de dérive en cavalemt sur un tanker. Houle de trois quart avant. Valeurs mesurées (Δ , \circ , \square , par amplitudes de houle croissantes) et calculées.

Comme le montrent les figures 6.6 et 6.7, l'accord entre théorie (potentielle) et mesures en bassin est en général remarquablement bon pour les structures massives comme les tankers ou les barges. En particulier les mesures réalisées, à la même période de houle et pour différents crêtes à creux, confirment que les efforts de dérive varient bien de manière quadratique (à très peu près) avec l'amplitude de la houle incidente. Sur ces figures on note

que le régime asymptotique est atteint dès que $\omega \sqrt{L/g}$ dépasse 4, soit une longueur d'onde inférieure (environ) au tiers de la longueur. A l'incidence de 135 degrés (figure 6.7), cette valeur asymptotique est d'environ 75 tf/m², ce qui suggère une longueur de carène de 300 m environ (en fait, 310 m!).

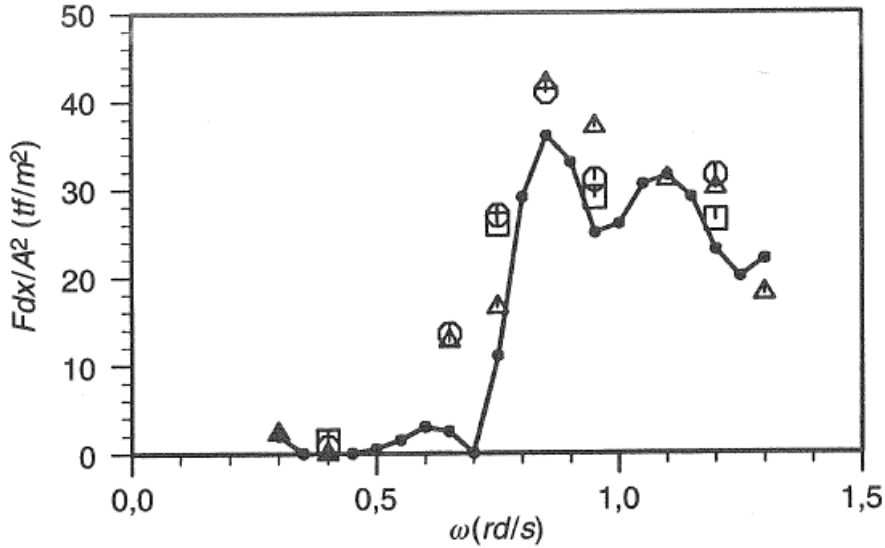


FIG. 6.8 – Effort de dérive en cavement sur une plate-forme semi-submersible massive. Houle de face. Valeurs mesurées (Δ , \circ , \square , par amplitudes de houle croissantes) et calculées.

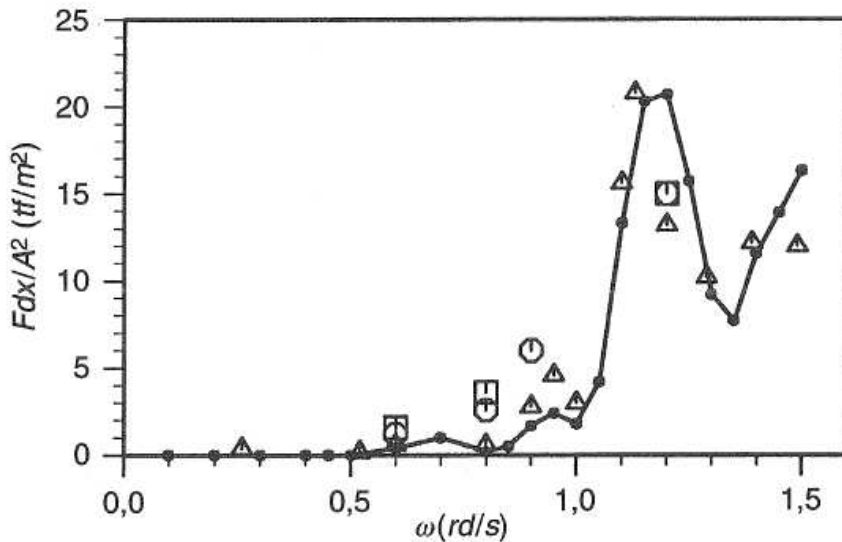


FIG. 6.9 – Effort de dérive en cavement sur une plate-forme semi-submersible élancée. Houle de face. Valeurs mesurées (Δ , \circ , \square , par amplitudes de houle croissantes) et calculées.

Les figures 6.8 et 6.9 présentent une comparaison analogue, dans le cas de plates-formes semi-submersibles. L'accord calcul-expérience est bon pour les petites longueurs d'onde, lorsque les effets de diffraction sont importants. Aux grandes longueurs d'onde, d'intérêt supérieur en pratique puisque les crêtes à creux associés sont susceptibles d'être importants,

le calcul fournit des valeurs quasiment nulles, alors que les valeurs mesurées ne le sont pas. On note aussi qu'alors les valeurs mesurées ne varient pas comme le carré de l'amplitude de houle, mais suivant une puissance supérieure. Ces écarts sont dus aux forces de traînée, de moyenne temporelle non nulle.

Enfin on présente sur la figure 6.10 une comparaison entre calcul et essais pour l'effort de dérive vertical sur une structure de fort déplacement et faible surface de flottaison, de type SPAR.

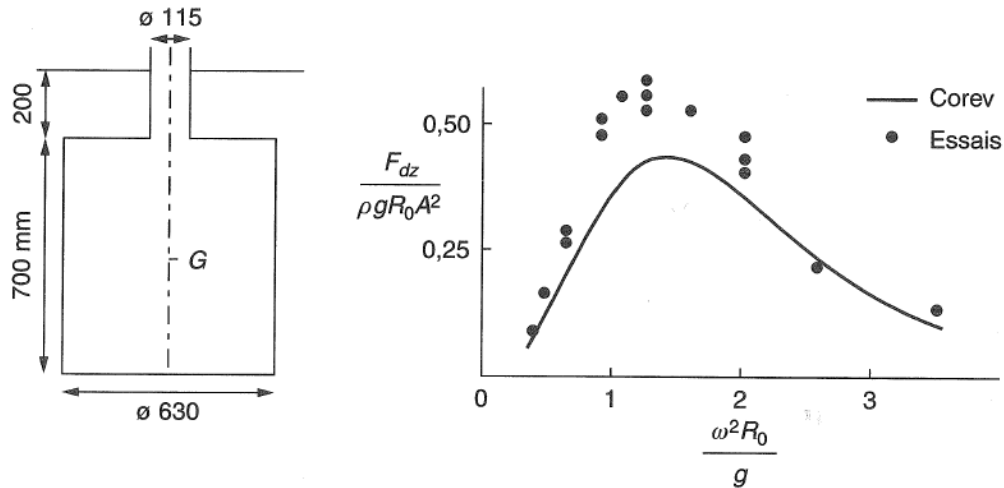


FIG. 6.10 – Effort de dérive vertical sur une plate-forme de type SPAR. Comparaison entre valeurs mesurées et calculées.

6.2.5 Effets visqueux

Les effets visqueux sont a priori négligeables pour les structures massives comme les barges et FPSO, sauf peut-être lorsque la résonance en roulis est atteinte: le calcul de la réponse en roulis nécessite l'introduction d'un amortissement visqueux complémentaire à l'amortissement de radiation, sans quoi des angles irréalistes sont prédits. Il est probable que les effets visqueux, lorsque le roulis est important, modifient le champ de vagues généré, et on peut se poser la question de savoir comment réaliser le calcul des efforts de dérive, lorsque l'on utilise la formulation de Maruo-Newman, ou comment corriger la pression locale des effets visqueux, lorsque l'on utilise celle de Pinkster. C'est là un problème qui n'a pas reçu beaucoup d'attention des hydrodynamiciens.

Pour les structures moins massives comme les plates-formes semi-submersibles, il peut y avoir séparation de l'écoulement si le nombre de Keulegan-Carpenter dépasse une certaine valeur, donc efforts de traînée. Il est facile de montrer que ceux qui prennent place sur des parties constamment immergées, comme les pontons, sont de moyenne temporelle nulle, mais ce n'est pas le cas de ceux prenant place dans la zone de marnage. Considérant le cas d'un cylindre vertical fixe, en grande profondeur (fig. 6.11), on établit que la force horizontale de traînée, intégrée entre le niveau zéro et la surface libre, vaut, grossièrement :

$$F_{\text{traînée}} = \frac{1}{2} \rho C_D D u(x,0,t) |u(x,0,t)| \eta_I(x,t) \quad (6.17)$$

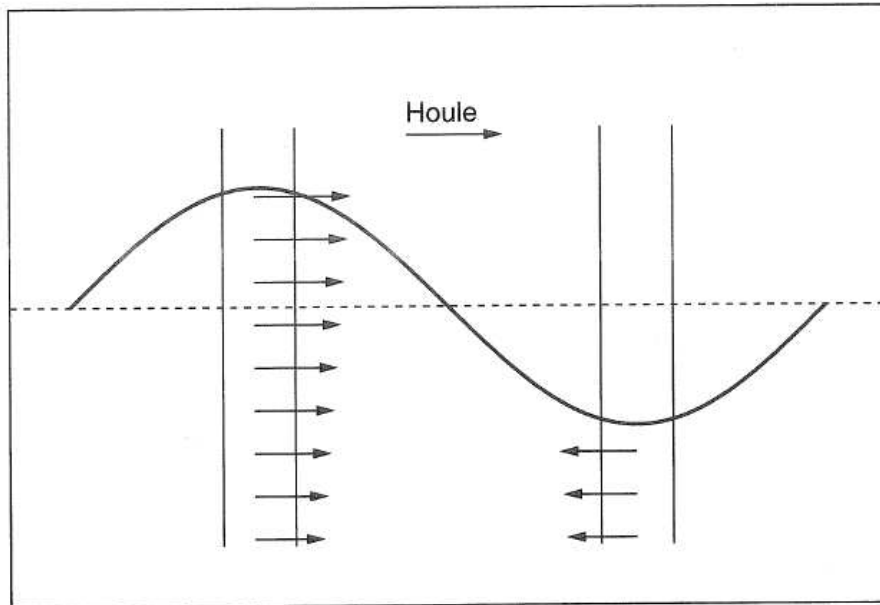


FIG. 6.11 – Efforts moyens de traînée sur un cylindre vertical en houle régulière.

de valeur moyenne :

$$\overline{F_{\text{traînée}}} = \frac{2}{3\pi} \rho C_D D A^3 \omega^2 \quad (6.18)$$

proportionnelle au cube de l'amplitude de la houle incidente, si l'on suppose le coefficient de traînée constant. En fait le coefficient de traînée est lui-même fonction de l'amplitude de houle, via le nombre de Keulegan-Carpenter $K_C = 2\pi A/D$. Certains proposent la relation $C_D = 0,2 K_C$ aux faibles valeurs de K_C . Cela signifie un effort moyen de traînée proportionnel à la puissance quatrième de l'élévation de surface libre. Une formulation plus appropriée est de prendre un coefficient de traînée nul lorsque K_C est inférieur à 4 (aux grands nombres de Reynolds rencontrés au réel, $K_C \simeq 4$ correspond à l'apparition de la séparation), puis une loi croissante jusqu'à une valeur d'ordre 0,5 ou 1 pour $K_C \sim 20$. C'est là aussi un domaine où la connaissance est insuffisante, et où les effets d'échelle et d'état de surface sont très importants (cf. chapitre 4).

De ces considérations il découle que les efforts moyens dus à la traînée sont beaucoup plus «non-linéaires» (d'ordre 3 ou 4 par rapport à l'amplitude de la houle) que ceux dus aux effets potentiels (d'ordre 2). Il en résulte que, en houle irrégulière, ils risquent de ne se manifester que sporadiquement, lors du passage des plus fortes vagues, mais d'atteindre alors des valeurs appréciables. Des observations effectuées en mer du Nord semblent aller dans ce sens.

6.2.6 Effet du courant

On vient de voir qu'en houle régulière seule il apparaît, dans le cadre d'une théorie de fluide parfait et d'écoulement irrotationnel, des efforts moyens de dérive. En courant seul il apparaît des efforts de traînée, liés à la séparation de l'écoulement sur la carène, donc à la nature visqueuse du fluide. Que se passe-t-il en houle plus courant, et comment concilier les deux représentations du fluide et de l'écoulement ?

On peut distinguer deux situations asymptotiques, pour lesquelles il n'y a guère d'ambiguïté :

- la vitesse oscillante induite par la houle est faible (en module) devant celle du courant : $A\omega \ll U_C$
- la vitesse du courant est faible devant celle induite par la houle : $A\omega \gg U_C$.

Dans le premier cas l'écoulement combiné ne se renverse jamais, la situation est voisine de celle du courant seul. On peut alors essayer d'exprimer les efforts moyens à partir de la formulation utilisée pour le courant seul, en lui rajoutant la vitesse induite par la houle, et en intégrant la force de traînée jusqu'au niveau de surface libre instantané.

Dans le second cas le renversement de l'écoulement annihile la séparation et la théorie potentielle reste applicable. On va voir ci-dessous que les efforts de dérive, donnés par la théorie potentielle, sont fortement modifiés par le courant, alors même que la réponse linéaire à la houle y est relativement moins sensible.

Dans le cas général, malheureusement, les vitesses du courant et de la houle sont souvent du même ordre et, ce qui n'arrange rien, pour des structures à grand tirant d'eau, leur valeur relative varie sur la carène avec la cote verticale : la théorie potentielle peut se trouver justifiée au niveau de la surface libre, alors que la traînée est dominante sur les parties immergées de la carène.

Efforts de dérive en présence de courant par la théorie potentielle

C'est là un problème qui a fait l'objet de beaucoup de recherches, la motivation principale étant d'avoir accès au fameux «amortissement de dérive» (voir le paragraphe 6.7.1). En ce cas le courant n'est qu'apparent, c'est l'opposé de la vitesse d'avance. Différents cadres théoriques et méthodes de résolution ont été développés. Tous reposent sur des hypothèses de faible cambrure de la houle et faible vitesse de courant (ou d'avance). Elles se traduisent formellement par la petitesse des trois paramètres :

- $\varepsilon = k A$: cambrure de la houle
- $F_n = U_C / \sqrt{gL}$: nombre de Froude, U_C étant la vitesse du courant, et L une longueur caractéristique
- $\tau = U_C \omega_e / g$: nombre de Brard, ω_e étant la pulsation «de rencontre» (*encounter frequency*) : dans un repère lié à la structure et dans un repère lié au fluide en mouvement les pulsations apparentes de la houle sont différentes. Elles sont liées par la relation :

$$\omega_e = \omega_0 - k U_C \cos \beta \quad (6.19)$$

où $\omega_0^2 = gk \operatorname{th} kh$. Leur différence relative est d'ordre τ .

Le potentiel de l'écoulement est d'abord décomposé en une partie stationnaire $U_C \overline{\phi^{(0)}}$ associée au courant seul (la carène étant fixe), et une partie instationnaire associée à la houle interagissant avec le courant. Le nombre de Froude étant supposé très petit, une bonne approximation de $U_C \overline{\phi^{(0)}} = U_C (\overline{\phi} - x)$ est le potentiel dit «du double modèle», où la surface libre est assimilée à un plan rigide (on suppose ici le courant apparent dirigé suivant l'axe Ox , vers les x négatifs). On établit alors que la composante instationnaire $\Phi(x, y, z, t) = \Re\{\varphi(x, y, z) \exp(-i\omega_e t)\}$ satisfait la condition de surface libre suivante :

$$-\frac{\omega_e^2}{g} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = i\tau \left[2 \nabla_0 \overline{\phi^{(0)}} \cdot \nabla_0 \varphi - \frac{\partial^2 \overline{\phi^{(0)}}}{\partial z^2} \varphi \right] \quad (6.20)$$

où ∇_0 désigne le gradient horizontal ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$), et où les termes d'ordre supérieur à ε et $\varepsilon\tau$ sont négligés. Au-delà d'une certaine distance, le potentiel $\bar{\phi}$ décroissant rapidement, la condition de surface libre se réduit à :

$$-\frac{\omega_e^2}{g} \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2i\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6.21)$$

La condition de glissement sur la carène se complique aussi sensiblement par rapport au cas sans courant, en particulier lorsque la structure répond à la houle.

Quelques codes de diffraction-radiation ont été étendus à la résolution de ce problème. Dans certains les composantes de diffraction et radiation du potentiel instationnaire φ sont décomposées en :

$$\varphi_D = \varphi_{D0} + \tau \varphi_{D1} \quad \varphi_{Rj} = \varphi_{R0j} + \tau \varphi_{R1j}$$

le petit paramètre τ étant conservé formellement. Dans d'autres le problème est résolu numériquement pour une valeur finie de τ . Efforts de dérive et leurs corrections à l'ordre τ à nouveau peuvent être obtenus de deux façons, par intégration directe de la pression ou par la méthode de champ lointain. Pour des géométries simples, consistant d'un ou plusieurs cylindres verticaux, la décomposition formelle aux ordres zéro et un en τ permet une résolution analytique.

Un effet de la vitesse d'avance (ou du courant) est que le champ de vagues au voisinage de la carène est sensiblement modifié. En particulier une vitesse d'avance opposée au sens de propagation de la houle conduit à une augmentation de l'élévation de surface libre à la proue, et à une diminution sur les flancs de la structure. Une interprétation physique, un peu sommaire, est que la houle incidente est réfractée par le courant $U_C \bar{\phi}$ généré par la vitesse d'avance : devant la proue le courant est opposé à la direction de propagation des vagues, leur amplitude augmente ; sur les flancs le courant est dans le même sens, l'amplitude des vagues diminue. Un exemple illustratif est fourni par la figure 6.12.

On comprend alors aisément que les efforts de dérive soient également affectés puisque l'élévation de surface libre à la flottaison en fournit la contribution principale (cf. le cas de la digue).

La formule d'Aranha

Bien qu'il existe des codes de diffraction-radiation qui traitent de l'interaction houle-courant et qui fournissent les efforts de dérive avec courant, leur mise en œuvre est sensiblement plus compliquée que celle des codes sans courant (il faut discrétiser la surface libre au voisinage de la carène, voir la figure 6.13) et pas toujours justifiable au stade de pré-études. Il se trouve que les efforts de dérive avec courant peuvent être reliés aux efforts de dérive sans courant par une relation qui, si elle n'est pas exacte, n'en fournit pas moins une bonne approximation. L'expression de l'amortissement de dérive qui en résulte est connue sous le nom de «formule d'Aranha».

Si $\vec{F}_d(\omega, \beta, 0, 0)$ désigne la force de dérive sans courant, pour une houle régulière de pulsation ω et incidence β , la force de dérive $\vec{F}_d(\omega, \beta, U_C, \alpha)$ avec courant d'intensité U_C et incidence α

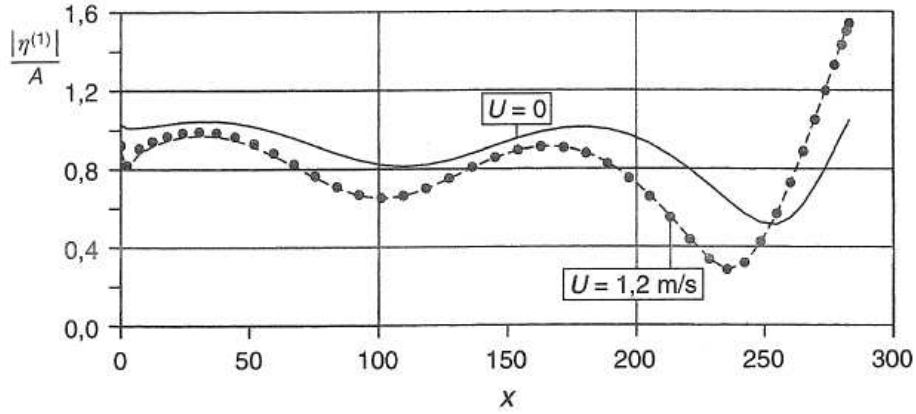


FIG. 6.12 – Elévation de surface libre le long d'une carène de FPSO, sans courant et avec une courant de 1,2 m/s. Période de houle : 14 s.

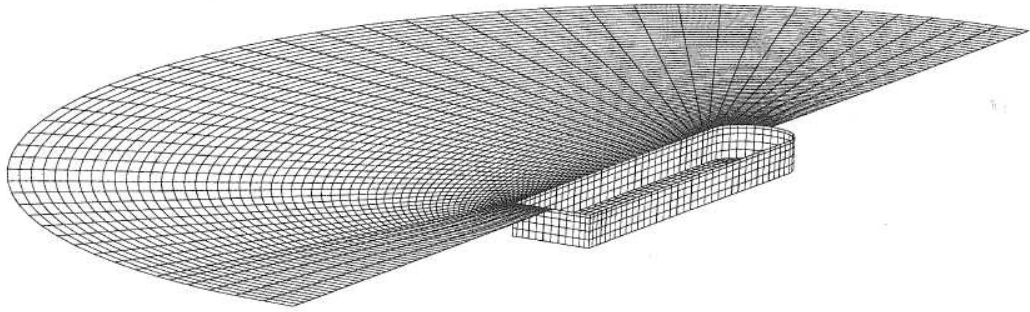


FIG. 6.13 – Maillages de la carène et de la surface libre avoisinante, pour la résolution du problème de diffraction-radiation en houle + courant.

s'y relie par :

$$\vec{F}_d(\omega, \beta, U_C, \alpha) = [1 + 4\tau \cos(\alpha - \beta)] \vec{F}_d(\omega [1 + \tau \cos(\alpha - \beta)], \beta + 2\tau \sin(\alpha - \beta), 0, 0) + O(\tau^2) \quad (6.22)$$

où $\tau = U_C \omega / g$.

Une interprétation est que le courant a pour effet d'augmenter l'amplitude de la houle, et d'en modifier pulsation et incidence, comme par réfraction. Cette interprétation ne correspond pas à ce qui se passe physiquement.

De manière équivalente on peut écrire :

$$\vec{F}_d(\omega, \beta, U_C, \alpha) = \vec{F}_d(\omega, \beta, 0, 0) + \begin{pmatrix} B_{d11} & B_{d12} \\ B_{d21} & B_{d22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_C \cos \alpha \\ U_C \sin \alpha \end{pmatrix} + O(\tau^2) \quad (6.23)$$

où les termes de la matrice \mathbf{B}_d sont donnés par :

$$B_{d11} = \left(\frac{4\omega}{g} F_{dx} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial F_{dx}}{\partial \omega} \right) \cos \beta - \frac{2\omega}{g} \frac{\partial F_{dx}}{\partial \beta} \sin \beta \quad (6.24)$$

$$B_{d12} = \left(\frac{4\omega}{g} F_{dx} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial F_{dx}}{\partial \omega} \right) \sin \beta + \frac{2\omega}{g} \frac{\partial F_{dx}}{\partial \beta} \cos \beta \quad (6.25)$$

$$B_{d21} = \left(\frac{4\omega}{g} F_{dy} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial F_{dy}}{\partial \omega} \right) \cos \beta - \frac{2\omega}{g} \frac{\partial F_{dy}}{\partial \beta} \sin \beta \quad (6.26)$$

$$B_{d22} = \left(\frac{4\omega}{g} F_{dy} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial F_{dy}}{\partial \omega} \right) \sin \beta + \frac{2\omega}{g} \frac{\partial F_{dy}}{\partial \beta} \cos \beta \quad (6.27)$$

C'est (une partie de) la matrice d'amortissements de dérive que l'on retrouvera au paragraphe 6.7.1.

Toutes ces expressions supposent la profondeur d'eau infinie. En profondeur finie, l'expression correspondante pour B_{d11} est :

$$B_{d11} = \left\{ \left[\left(\frac{\partial F_{dx}}{\partial \omega} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} F_{dx} \right) \omega + \frac{2}{\gamma} F_{dx} \right] \cos \beta - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial F_{dx}}{\partial \beta} \sin \beta \right\} \frac{k}{\omega} \quad (6.28)$$

où γ est le rapport de la vitesse de groupe à la vitesse de phase :

$$\gamma = \frac{C_G}{C_P} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) \quad (6.29)$$

Personne n'a encore réussi à démontrer rigoureusement la validité ou l'invalidité de la formule d'Aranha, et c'est là un sujet assez controversé. Il semble qu'elle fournisse le résultat exact lorsque le potentiel de l'écoulement ne comporte pas de termes évanescents. La figure 6.14 montre une comparaison entre les résultats donnés par la formule et ceux obtenus analytiquement (en résolvant le problème de diffraction avec courant) pour un ensemble de quatre cylindres verticaux, de tirant d'eau infini et fixes. L'accord est à la précision machine. Sur cette figure on remarque que l'amortissement de dérive peut prendre des valeurs négatives.

Les figures 6.15 et 6.16 traitent du cas d'un FPSO. Le maillage de la carène et de la surface libre est représenté figure 6.13. Quand la carène est maintenue immobile, l'accord entre formule d'Aranha et calcul numérique est assez bon ; il se détériore légèrement lorsqu'elle est libre de répondre à la houle.

Les comparaisons avec les valeurs mesurées se heurtent à la difficulté que ces dernières sont entachées d'effets visqueux : la valeur moyenne des efforts de traînée, et/ou de frottement, en houle plus courant n'est pas la même qu'en houle seule. Pour les FPSO, à l'échelle du bassin (en régime laminaire), il semble que ces effets parasites soient limités et on observe un accord raisonnable entre amortissement de dérive mesuré (B_{d11}) et calculé rigoureusement, ou estimé à partir de la formule d'Aranha.

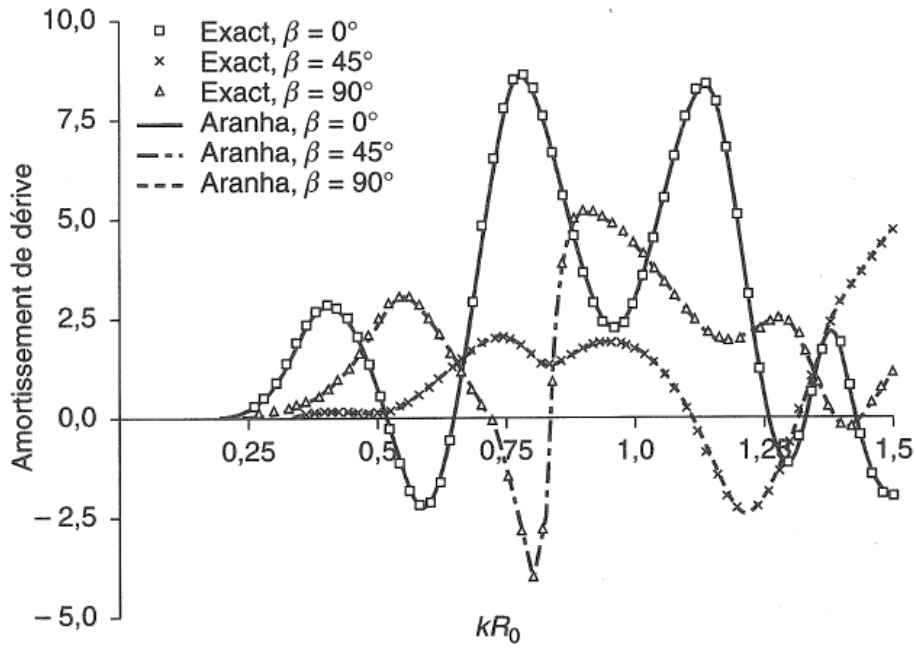


FIG. 6.14 – Amortissement de dérive sur un ensemble de quatre cylindres verticaux. Comparaison entre le calcul exact et la formule d’Aranha.

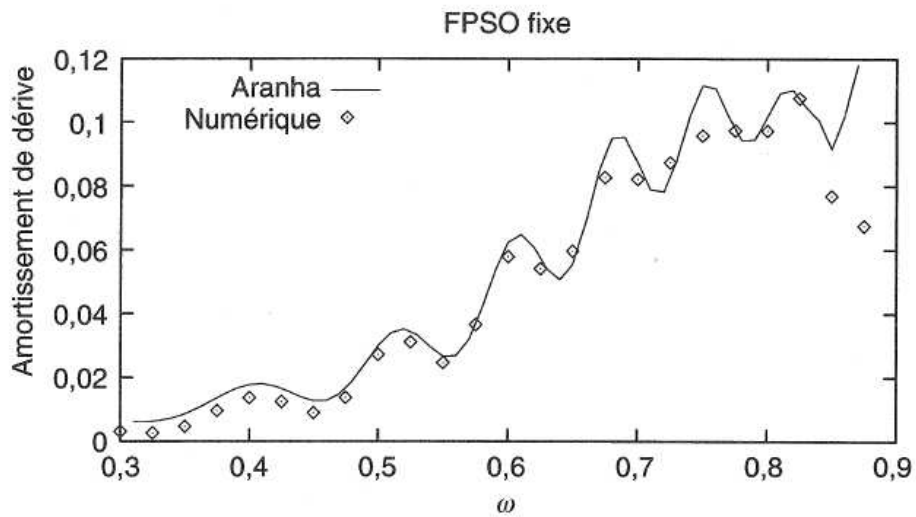


FIG. 6.15 – Amortissement de dérive en cavalemt d’un FPSO maintenu immobile. Houle de face. Comparaison entre formule d’Aranha et calcul numérique (code HYDROSTAR).

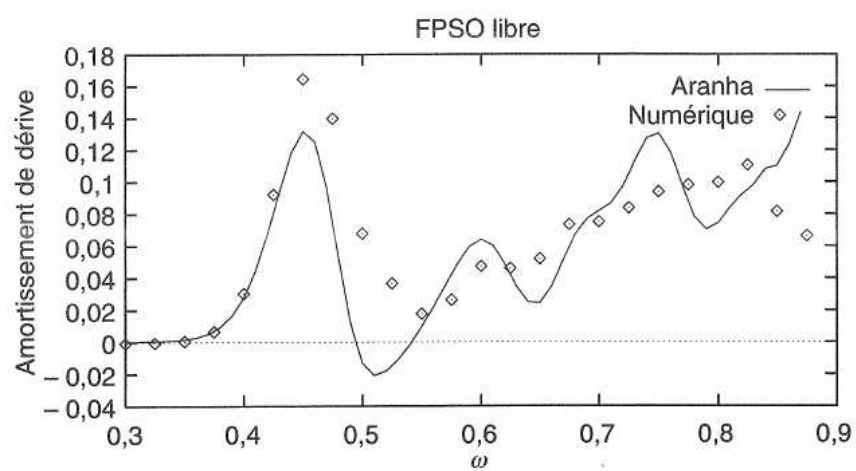


FIG. 6.16 – Amortissement de dérive en cavalement d'un FPSO libre de répondre à la houle. Houle de face. Comparaison entre formule d'Aranha et calcul numérique (code HYDROSTAR).

6.3 Efforts de fréquence double sur houle régulière

On a déjà mentionné que, pour que l'on puisse en étendre les résultats au cas d'une houle irrégulière, la houle incidente de base dans une théorie de deuxième ordre est une houle bichromatique. Le cas particulier de la houle régulière a surtout un intérêt académique.

Pour simplifier on suppose la structure fixe. On a vu qu'au deuxième ordre d'approximation les efforts hydrodynamiques s'expriment par :

$$\vec{F}^{(2)} = \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} \eta^{(1)2} \vec{n}_0 \, d\Gamma - \rho \iint_{S_{C_0}} \left(\Phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right) \vec{n}_0 \, dS \quad (6.30)$$

Une fois résolu le problème de premier ordre il est aisé d'évaluer la contribution des deux termes quadratiques aux efforts de pulsation 2ω (nonobstant les problèmes numériques déjà mentionnés). La difficulté provient du potentiel de deuxième ordre $\Phi^{(2)}$ qui se décompose en :

$$\Phi^{(2)}(x, y, z, t) = \Re \left\{ \left(\varphi_I^{(2)}(x, y, z) + \varphi_D^{(2)}(x, y, z) \right) e^{-2i\omega t} \right\} + \varphi_0^{(2)}(x, y, z) \quad (6.31)$$

Le terme stationnaire $\varphi_0^{(2)}$ ne contribue pas aux efforts de deuxième ordre.

On a donné l'expression de $\varphi_I^{(2)}$ au chapitre 3 :

$$\varphi_I^{(2)} = \frac{3iA^2\omega}{8} \frac{\operatorname{ch} 2k(z+h)}{\operatorname{sh}^4 kh} e^{2ikx} \quad (6.32)$$

Il est négligeable en grande profondeur ($kh > 3$). Le calcul de sa contribution aux efforts ne pose pas de difficulté. Reste la contribution du potentiel de diffraction du deuxième ordre, soit donc l'évaluation de :

$$\vec{f}_{2D}^{(2)} = 2i\omega \rho \iint_{S_{C_0}} \varphi_D^{(2)} \vec{n}_0 \, dS \quad (6.33)$$

$\varphi_D^{(2)}$ vérifie le problème aux limites :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_D^{(2)} &= 0 && \text{dans le domaine fluide} \\ g \varphi_{dz}^{(2)} - 4\omega^2 \varphi_D^{(2)} &= \alpha(\varphi_I^{(1)}, \varphi_D^{(1)}) && z = 0 \\ \nabla \varphi_D^{(2)} \cdot \vec{n}_0 &= -\nabla \varphi_I^{(2)} \cdot \vec{n}_0 && \text{sur la carène} \\ \varphi_{dz}^{(2)} &= 0 && z = -h \end{aligned} \quad (6.34)$$

Condition de radiation

où le deuxième membre de l'équation de surface libre s'écrit :

$$\alpha = -\frac{i\omega}{2g} \varphi^{(1)} (g \varphi_{zz}^{(1)} - \omega^2 \varphi_z^{(1)}) + i\omega \nabla \varphi^{(1)2} + \frac{i\omega}{2g} \varphi_I^{(1)} (g \varphi_{Izz}^{(1)} - \omega^2 \varphi_{Iz}^{(1)}) - i\omega \nabla \varphi_I^{(1)2} \quad (6.35)$$

avec : $\varphi^{(1)} = \varphi_I^{(1)} + \varphi_D^{(1)}$

Ce deuxième membre α de l'équation de surface libre décroît lentement avec la distance radiale (en $R^{-1/2}$). Physiquement il équivaut à une distribution de pression sur le plan de

surface libre, oscillant à la pulsation 2ω et générant son propre champ de vagues qui interagit avec le corps.

Par ailleurs on ne peut écrire la condition de radiation sous la forme de Sommerfeld. En effet on établit que le champ lointain du potentiel de diffraction de deuxième ordre, à l'ordre $R^{-1/2}$, consiste en deux systèmes d'ondes :

1. Des ondes «libres», se propageant radialement, de nombre d'onde k_2 , relié à la pulsation 2ω par la relation usuelle de dispersion :

$$4\omega^2 = g k_2 \operatorname{th} k_2 h \quad (6.36)$$

2. Des ondes «liées» au système d'ondes de premier ordre, se propageant localement dans la direction bissectrice entre le rayon vecteur et la direction de propagation de la houle incidente. Leurs crêtes prennent la forme d'un réseau de paraboles.

Ce double système d'onde est bien visible sur la figure 6.17 qui présente le champ de vagues de deuxième ordre pour un ensemble de quatre cylindres verticaux. Nombre d'onde, rayon et entraxe sont les mêmes que pour la figure 5.11 : $kD = 3,25$; $kR_0 = 0,63$, D étant l'entraxe.

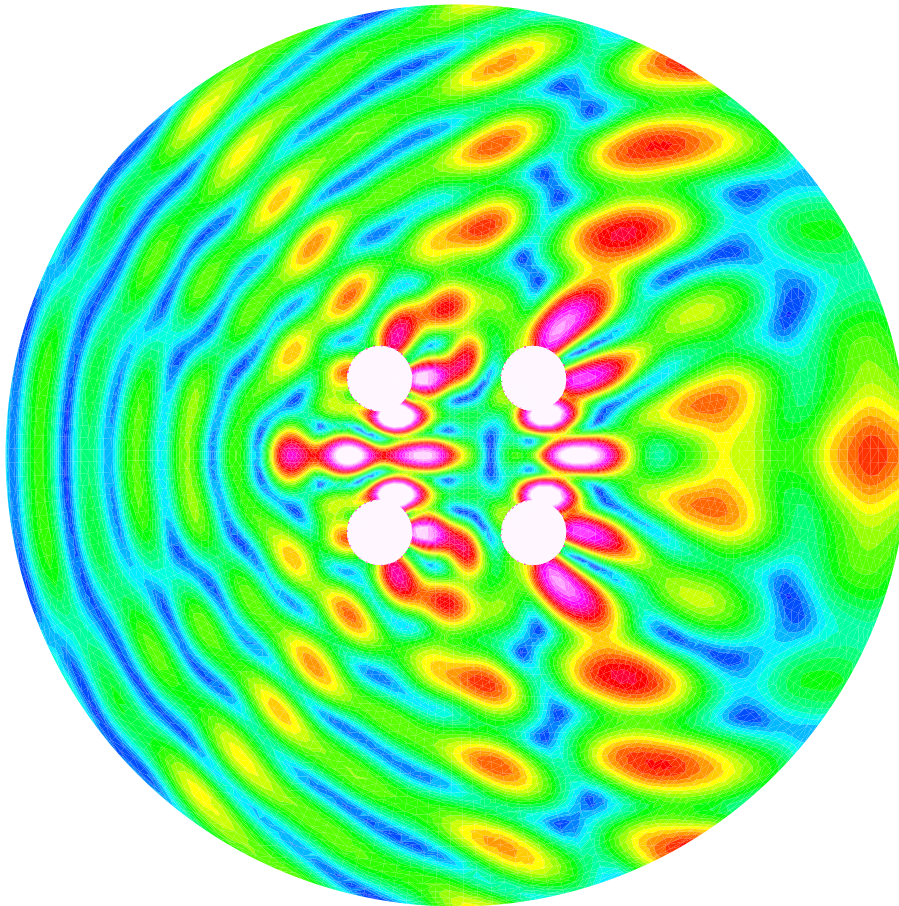


FIG. 6.17 – Diffraction d'une houle régulière par un ensemble de quatre cylindres verticaux. Module de la composante de deuxième ordre de l'élévation de surface libre.

L'obtention d'un tel résultat nécessite la résolution complète du problème de diffraction de deuxième ordre.

Il est possible d'éviter cette résolution, lourde numériquement, si l'on s'intéresse seulement aux efforts. Pour cela on introduit le potentiel $\varphi_{Rk}(2\omega) = \psi$ de radiation de la théorie linéaire, à la pulsation 2ω et suivant le degré de liberté considéré, soit k . Ce potentiel vérifie le problème aux limites :

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= 0 && \text{dans le domaine fluide} \\
g\psi_z - 4\omega^2\psi &= 0 && z = 0 \\
\nabla\psi \cdot \vec{n}_0 &= N_{0k} && \text{sur la carène} \\
\psi_z &= 0 && z = -h \\
\sqrt{R}(\psi_R - ik_2\psi) &= 0 && R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{6.37}$$

On veut évaluer l'intégrale :

$$I_{Dk} = \iint_{S_{C_0}} \varphi_D^{(2)} n_{0k} dS$$

soit :

$$I_{Dk} = \iint_{S_{C_0}} \varphi_D^{(2)} \frac{\partial\psi}{\partial n} dS$$

En appliquant la deuxième formule de Green il vient :

$$I_{Dk} = \iint_{S_{C_0}} \psi \frac{\partial\varphi_D^{(2)}}{\partial n} dS - \iint_{z=0 \cup S_\infty \cup z=-h} \left(\varphi_D^{(2)} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\varphi_D^{(2)}}{\partial n} \right) dS \tag{6.38}$$

où S_∞ est une surface cylindrique de contrôle entourant le corps.

L'intégrale sur le fond marin est identiquement nulle. A partir de la connaissance des champs lointains de ψ et $\varphi_D^{(2)}$ on établit que celle sur S_∞ tend vers zéro lorsque l'on éloigne cette surface de contrôle à l'infini. Il reste alors :

$$I_{Dk} = - \iint_{S_{C_0}} \psi \frac{\partial\varphi_I^{(2)}}{\partial n} dS + \frac{1}{g} \iint_{z=0} \alpha \psi dS \tag{6.39}$$

où α est le deuxième membre de la condition de surface libre vérifiée par $\varphi_D^{(2)}$ (6.34).

L'intégrale sur la surface libre fait intervenir des quantités accessibles dès lors que l'on a résolu les problèmes de premier ordre. Pour autant son évaluation n'est pas aisée car sa convergence avec la distance radiale est lente. Des algorithmes ont maintenant été développés qui permettent une évaluation précise.

Le cas du cylindre vertical est facile à traiter puisque toutes les quantités de premier ordre sont connues de manière analytique, et que l'évaluation de l'intégrale de surface libre se ramène à une simple intégration numérique dans la direction radiale.

Les figures 6.18 et 6.19 présentent les parties réelles et imaginaires des différentes composantes de l'effort horizontal de deuxième ordre, pour une profondeur égale à 3 fois le rayon. On constate que la contribution du potentiel de diffraction de deuxième ordre («l'intégrale de surface libre») est appréciable. En particulier elle ne peut être négligée dès que le nombre

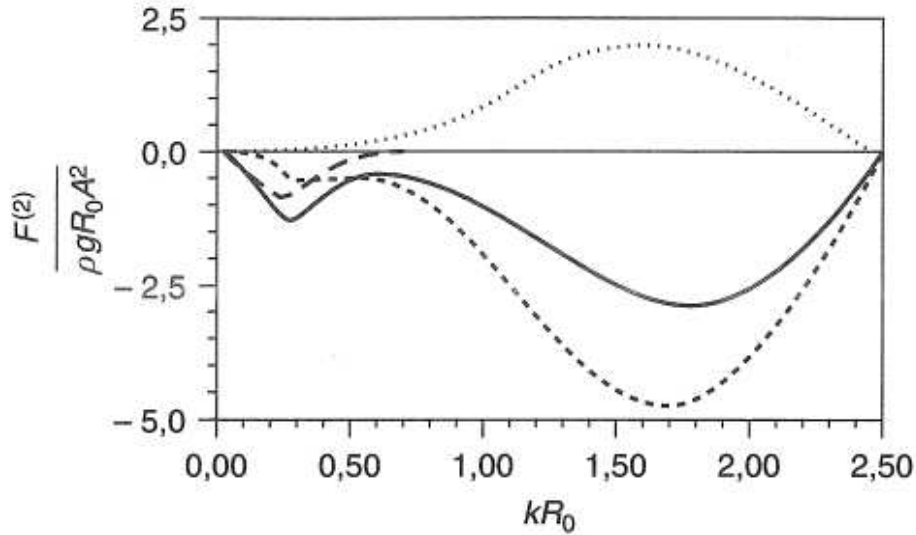


FIG. 6.18 – Parties réelles des efforts de diffraction de deuxième ordre sur un cylindre vertical.

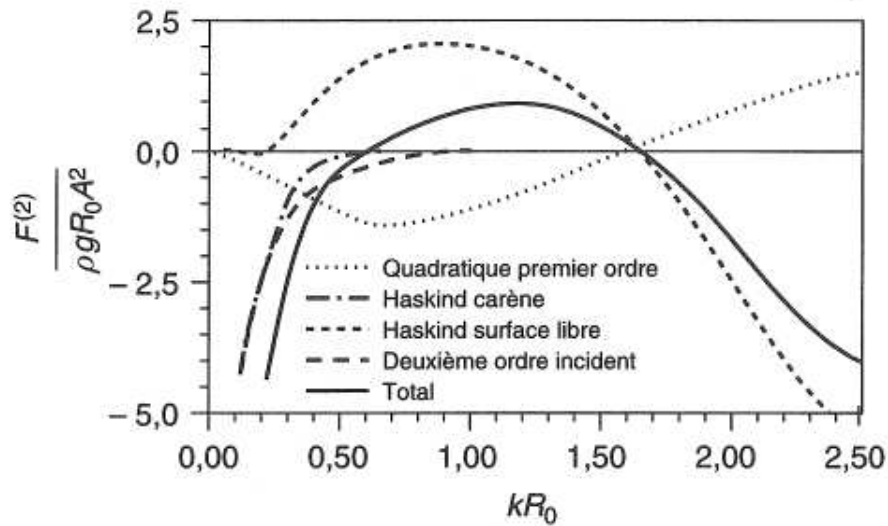


FIG. 6.19 – Parties imaginaires des efforts de diffraction de deuxième ordre sur un cylindre vertical.

d'onde adimensionnel kR_0 excède 0,10 ou 0,15. Dans le cas de relativement faible profondeur d'eau considéré ici, le potentiel incident de deuxième ordre joue rapidement un rôle prépondérant quand kR_0 diminue. Sa contribution disparaît dès que kh dépasse 3.

En ce qui concerne la contribution des termes de premier ordre (le terme de flottaison plus celui impliquant $-1/2 (\nabla\Phi^{(1)})^2$), aux très faibles nombres d'onde, elle est donnée asymptotiquement par :

$$f^{(2)} = -\frac{5}{4} i \pi \rho g k R_0^2 A^2 \quad (6.40)$$

où $F^{(2)} = \Re \{ f^{(2)} \exp(-2i\omega t) \}$.

Cette expression fournit une bonne approximation des efforts totaux de deuxième ordre

pour $kR_0 < 0,10$ et $kh > 3$. L'application de la formule de Morison, intégrée jusqu'au niveau instantané de surface libre, fournit une valeur différente, qui est donc fautive. La raison est que la formule de Morison suppose l'écoulement incident uniforme dans chaque plan horizontal (la même vitesse en tout x et y). Pour rendre compte correctement des efforts de deuxième ordre il faut abandonner la formule de Morison et utiliser les **équations de Rainey**.

Une caractéristique des pressions dynamiques de deuxième ordre est qu'elles pénètrent profondément la colonne d'eau, du côté exposé à la houle incidente des structures, en raison du phénomène de clapotis qui s'y développe. On a vu au chapitre 3 que, dans le cas de deux houles régulières de même pulsation et de directions de propagation opposées, le potentiel de deuxième ordre devient indépendant des variables d'espace. Le même phénomène se produit ici. Newman (1990) a montré que la décroissance du potentiel de diffraction de deuxième ordre, avec la cote verticale, est en $1/z$. La figure 6.20 présente, pour $kR_0 = 2$, et en fonction de kh , le module de l'effort de premier ordre, celui de l'effort de deuxième ordre résultant des termes de premier ordre, et celui de l'effort de deuxième ordre dû au potentiel $\varphi_D^{(2)}$, via l'intégrale de surface libre. Les deux premières composantes se stabilisent pour $kh = 3$, alors que la dernière continue de croître, de manière logarithmique.

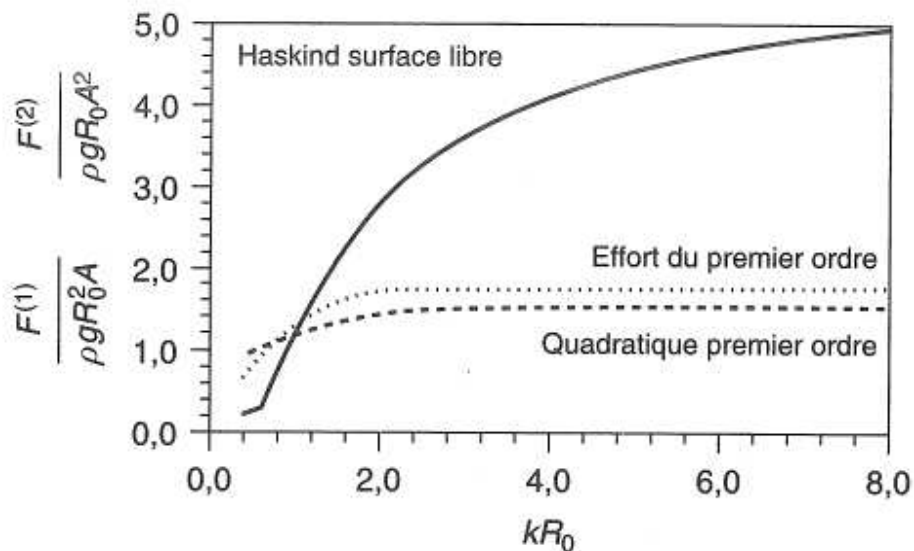


FIG. 6.20 – Effort de diffraction de deuxième ordre sur un cylindre vertical. Variation avec kh , pour $kR_0 = 2$.

Une autre illustration est fournie par la figure 6.21, qui montre les efforts (de deuxième ordre) verticaux agissant sur une colonne de la TLP de Snorre (voir la figure 6.22), obtenus par des mesures en bassin et par le calcul. Il s'agit d'un cylindre tronqué de 25 m de diamètre et 37,5 m de tirant d'eau, testé à l'échelle du quarantième. Lorsque la fréquence de houle augmente, les efforts verticaux de deuxième ordre (divisés par l'amplitude de houle au carré) ne décroissent pas, à l'inverse de ceux de premier ordre, mais tendent à augmenter en oscillant.

On conçoit que ces efforts verticaux prenant place même pour de forts tirants d'eau aient quelque peu inquiété les concepteurs de plates-formes sur lignes tendues, devant les risques de résonance en pilonnement, roulis ou tangage. Dans ce cas il s'agit de calculer les efforts de deuxième ordre dans des houles dont la période vaut deux fois la période propre

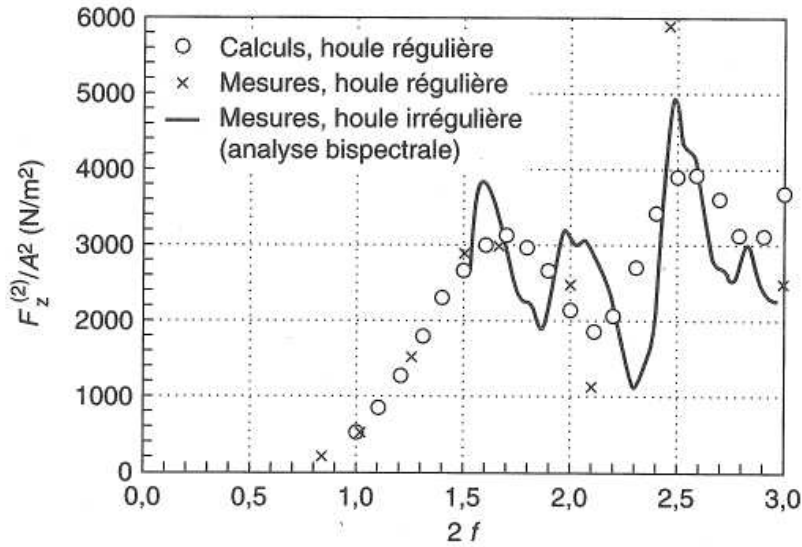


FIG. 6.21 – Effort vertical de deuxième ordre sur une colonne de la TLP de Snorre. Comparaison entre valeurs calculées et mesurées.

considérée, donc, par exemple pour la TLP de Snorre, environ 4,5 secondes. Pour ces calculs des maillages très fins sont requis, pour permettre de bien représenter le potentiel auxiliaire de radiation ψ à la période moitié (2,2 secondes!), sur la carène (figure 6.22) et aussi sur la surface libre. Ce sont donc des calculs extrêmement coûteux, difficiles à réaliser au niveau d'études préliminaires.

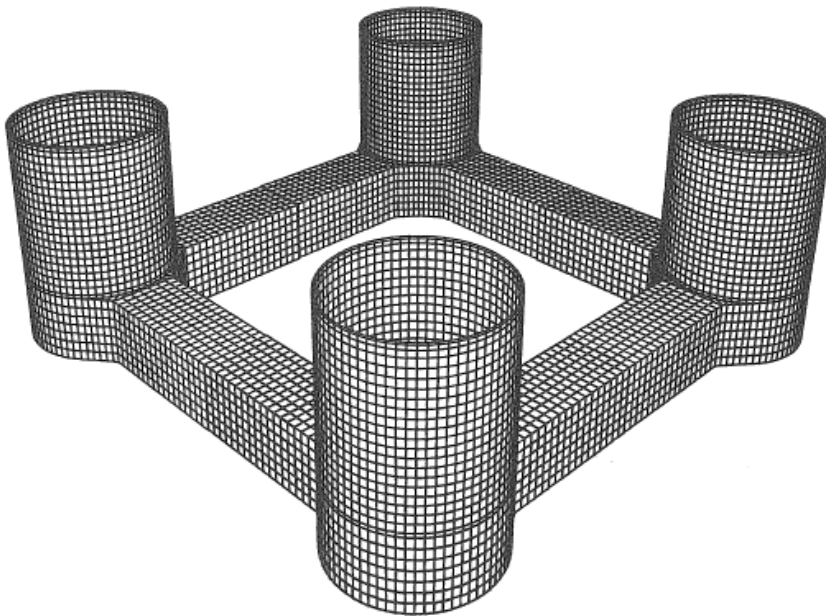


FIG. 6.22 – Maillage de la TLP de Snorre pour le calcul des efforts de deuxième ordre.

6.4 Efforts de deuxième ordre sur houle bichromatique

C'est le cas de base à résoudre pour pouvoir passer à la houle irrégulière. Soit donc, au premier ordre d'approximation, l'élévation de surface libre :

$$\eta^{(1)}(x,t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (6.41)$$

(on suppose la houle unidirectionnelle).

La première étape est, pour chacune des deux composantes, de résoudre le problème de diffraction-radiation et de calculer la réponse linéaire. On détermine alors le potentiel global de l'écoulement :

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x,y,z,t) = \Re \left\{ \left(\varphi_{I1}^{(1)} + \varphi_{D1}^{(1)} - \sum_{j=1}^6 i\omega_1 x_{1j}^{(1)} \varphi_{R1j} \right) e^{-i\omega_1 t} \right. \\ \left. + \left(\varphi_{I2}^{(1)} + \varphi_{D2}^{(1)} - \sum_{j=1}^6 i\omega_2 x_{2j}^{(1)} \varphi_{R2j} \right) e^{-i\omega_2 t} \right\} \end{aligned} \quad (6.42)$$

et le mouvement de la structure :

$$\vec{X}^{(1)}(t) = \Re \left\{ \vec{x}_1^{(1)} e^{-i\omega_1 t} + \vec{x}_2^{(1)} e^{-i\omega_2 t} \right\} \quad (6.43)$$

Les efforts de deuxième ordre s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(2)} = \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} \rho g \left(\eta^{(1)2} - 2\eta^{(1)} \zeta^{(1)} \right) \vec{n}_0 d\Gamma + \vec{A}^{(1)} \wedge \iint_{S_{C_0}} -\rho \Phi_t^{(1)} \vec{n}_0 dS \\ + \iint_{S_{C_0}} -\rho \left[\Phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\nabla \Phi^{(1)} \right)^2 + \vec{P}_0 \vec{P}^{(1)} \cdot \nabla \Phi_t^{(1)} \right] \vec{n}_0 dS + \vec{F}_{HS}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.44)$$

avec les mêmes conventions que précédemment. Tous les termes qui apparaissent dans les intégrants sont quadratiques par rapport à la solution du premier ordre (y compris le potentiel $\Phi^{(2)}$ via le deuxième membre de la condition de surface libre). On en déduit donc que $\vec{F}^{(2)}$ est de la forme :

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(2)}(t) = A_1^2 \vec{f}_d(\omega_1) + A_2^2 \vec{f}_d(\omega_2) + \Re \left\{ A_1^2 \vec{f}_+^{(2)}(\omega_1, \omega_1) e^{-2i\omega_1 t} + A_2^2 \vec{f}_+^{(2)}(\omega_2, \omega_2) e^{-2i\omega_2 t} \right. \\ \left. + 2A_1 A_2 \vec{f}_-^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + 2A_1 A_2 \vec{f}_+^{(2)}(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \right\} \end{aligned} \quad (6.45)$$

où \vec{f}_d désigne l'effort de dérive normalisé (divisé par le carré de l'amplitude de la houle incidente).

Le problème se ramène donc à la détermination de $\vec{f}_+^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ et $\vec{f}_-^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$, appelées **fonctions de transfert quadratiques** (QTF : *Quadratic Transfer Functions*), d'où peuvent être déduits d'où les autres termes, y compris les efforts de dérive, puisque manifestement :

$$\vec{f}_d(\omega) = \vec{f}_-^{(2)}(\omega, \omega) \quad (6.46)$$

Les difficultés théoriques sont exactement les mêmes que pour les efforts de fréquence double sur houle régulière, en particulier l'évaluation de la contribution du potentiel de diffraction de deuxième ordre. Les difficultés numériques mentionnées lorsque l'on calcule les

efforts de dérive par intégration de la pression se retrouvent également ici (potentiel à la flottaison, cinématique au voisinage des angles vifs).

A ce stade il convient de se rappeler que le calcul des efforts de deuxième ordre n'a généralement d'utilité que dans la mesure où il permet d'exhiber des efforts prenant place aux fréquences propres, et à ces fréquences seulement, des systèmes considérés, lorsqu'elles se situent en dehors des fréquences de houle.

6.4.1 Efforts de deuxième ordre en mode somme

Le domaine d'application des efforts de deuxième ordre en mode somme est celui des systèmes raides : vibrations des coques de navire, résonance verticale des plates-formes sur lignes tendues (springing), flexion des structures gravitaires en grande profondeur. La tâche numérique pour le calcul de ces efforts est colossale puisque, d'une part, il n'est pas possible de négliger le potentiel de diffraction de deuxième ordre et, d'autre part, la discrétisation de la carène (et de la surface libre) doit être suffisamment fine pour bien prendre en compte des phénomènes prenant place à des petites échelles spatiales (longueurs d'onde de l'ordre de la dizaine de mètres). Les fonctions de transfert quadratiques $\vec{f}_+^{(2)}$ doivent alors être évaluées pour tous les couples ω_i, ω_j tels que $\omega_i + \omega_j$ soit voisin d'une pulsation propre.

6.4.2 Efforts de deuxième ordre en mode différence

Ici le champ d'application est bien plus large. C'est d'abord le mouvement horizontal des structures ancrées, dont les périodes propres vont de une à plusieurs minutes. C'est aussi le mouvement vertical (roulis, tangage, pilonnement) des structures flottantes à faibles raideurs hydrostatiques (semi-submersibles, bouées SPAR, embase-poids en remorquage, etc.).

La formulation de ces efforts est très similaire à celle de ceux de mode somme. Les applications numériques montrent que, dans la mesure où la différence $|\omega_1 - \omega_2|$ des deux pulsations est petite, la contribution de l'intégrale de surface libre (qui exprime une partie de la contribution du potentiel de diffraction de deuxième ordre) est souvent négligeable. C'est là la principale différence avec les efforts de mode somme, pour lesquels cette contribution est prépondérante.

Une approximation très souvent effectuée en pratique (approximation dite de Newman) consiste à tirer parti de ce que $\vec{f}_-^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$ tend vers $\vec{f}_d(\omega_1)$ lorsque ω_2 tend vers ω_1 . On écrit alors :

$$\vec{f}_-^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \simeq \vec{f}_d(\omega_1) \quad (\text{Newman, 1974}) \quad (6.47)$$

ou :

$$\vec{f}_-^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \simeq \vec{f}_d\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \quad (\text{Pinkster, 1975}) \quad (6.48)$$

ou encore :

$$f_{-k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \simeq \sqrt{|f_{dk}(\omega_1) f_{dk}(\omega_2)|} \text{sign}(f_{dk}) \quad (6.49)$$

dont l'intérêt pratique ressortira plus loin.

Ce type d'approximation n'est justifiable que dans la mesure où la structure considérée répond à très basse fréquence, et où les efforts de dérive sont significatifs. Il est évidemment

souhaitable de mieux cerner ce critère purement subjectif. Une «meilleure approximation» consiste à calculer exactement les termes quadratiques de la solution au premier ordre, et à inclure la contribution du potentiel de deuxième ordre par une approche «à la Morison», à partir des accélérations et pressions associées au champ incident.

Contribution du potentiel incident de deuxième ordre

On a, au chapitre 3, donné l'expression du potentiel de deuxième ordre associé à une houle bichromatique. Dans le cas où la profondeur est relativement grande ($k_1 h$ et $k_2 h$ supérieurs à 3), et où les deux composantes se propagent dans la même direction, il prend la forme :

$$\Phi_-^{(2)}(x,y,z,t) = \frac{-2 A_1 A_2 \omega_1 \omega_2 \Delta\omega}{-(\Delta\omega)^2 + g \Delta k \operatorname{th} \Delta k h} \frac{\operatorname{ch} \Delta k (z+h)}{\operatorname{ch} \Delta k h} \sin(\Delta k x - \Delta\omega t) \quad (6.50)$$

où $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ et $\Delta k = k_1 - k_2$. Lorsque Δk est petit, la variation spatiale de $\Phi_-^{(2)}$ est lente, et sa contribution aux efforts peut s'évaluer via le terme inertiel de la formule de Morison. Par exemple pour l'effort horizontal :

$$F_{-x}^{(2)} = (1 + C_{mxx}) \rho \nabla \frac{\partial^2 \Phi_-^{(2)}}{\partial x \partial t} (0,0,z_B,t) \quad (6.51)$$

le coefficient de masse ajoutée C_{mxx} étant celui du double modèle (fréquence nulle).

Ce calcul est aisé à mettre en œuvre, et peut fournir une contribution non négligeable, en faible profondeur d'eau et/ou dans le cas de structures à grand tirant d'eau et/ou de périodes propres pas trop élevées.

Nota

Afin de ne pas alourdir les écritures on a supposé les deux composantes de houle de même incidence β . Il est clair que les fonctions de transfert quadratiques dépendent également de l'incidence et qu'il faut donc écrire :

$$\vec{f}_+^{(2)}(\omega_1, \beta_1, \omega_2, \beta_2) \quad \vec{f}_-^{(2)}(\omega_1, \beta_1, \omega_2, \beta_2)$$

A noter que dans le cas où les deux incidences sont différentes on ne peut pas relier simplement $\vec{f}_-^{(2)}(\omega, \beta_1, \omega, \beta_2)$ à $\vec{f}_d(\omega, \beta_1)$ ou $\vec{f}_d(\omega, \beta_2)$. En houle multidirectionnelle l'approximation de Newman n'est plus justifiable. En pratique on considère rarement, pour ce genre de problème, des états de mer multidirectionnels.

6.5 Efforts de deuxième ordre sur houle irrégulière

Une fois déterminées (ou approchées) les fonctions de transfert quadratiques des efforts pour tous les couples (ω_i, ω_j) de pulsations présentes dans le signal houle, il est aisé d'exprimer les efforts de deuxième ordre sur houle irrégulière (que l'on suppose unidirectionnelle de direction β).

Dans le domaine temporel, l'élévation de houle incidente étant donnée sous la forme (au premier ordre d'approximation) :

$$\eta^{(1)}(x,y,t) = \Re \left\{ \sum_i A_i e^{i(k_i x \cos \beta + k_i y \sin \beta - \omega_i t + \theta_i)} \right\} \quad (6.52)$$

les efforts de deuxième ordre s'écrivent :

Mode somme :

$$\vec{F}_+^{(2)}(t) = \Re \left\{ \sum_i \sum_j A_i A_j \vec{f}_+^{(2)}(\omega_i, \omega_j, \beta) e^{i[-(\omega_i + \omega_j)t + \theta_i + \theta_j]} \right\} \quad (6.53)$$

(le point de référence étant en $x = y = 0$)

Mode différence :

$$\vec{F}_-^{(2)}(t) = \Re \left\{ \sum_i \sum_j A_i A_j \vec{f}_-^{(2)}(\omega_i, \omega_j, \beta) e^{i[-(\omega_i - \omega_j)t + \theta_i - \theta_j]} \right\} \quad (6.54)$$

Dans le cas où l'on utilise une approximation du type :

$$f_{-k}^{(2)}(\omega_1, \omega_2, \beta) = \sqrt{|f_{dk}(\omega_1, \beta) f_{dk}(\omega_2, \beta)|} \text{sign}(f_{dk}(\beta)) \quad (6.55)$$

l'expression des efforts de mode différence peut se transformer en :

$$F_{-k}^{(2)}(t) = \left\{ \left[\sum_i A_i \sqrt{|f_{dk}(\omega_i, \beta)|} \cos(-\omega_i t + \theta_i) \right]^2 + \left[\sum_i A_i \sqrt{|f_{dk}(\omega_i, \beta)|} \sin(-\omega_i t + \theta_i) \right]^2 \right\} \text{sign}(f_{dk}(\beta)) \quad (6.56)$$

On suppose donc ici que les efforts de dérive pour le degré de liberté k sont de signe constant lorsque la pulsation varie. On peut démontrer que c'est le cas pour les composantes en cavement et embardée, la projection de la force de dérive sur la direction de propagation de la houle étant dirigée dans le même sens. Pour le moment en lacet on peut toujours s'arranger en l'exprimant momentanément par rapport à un point suffisamment éloigné du centre de gravité.

Un intérêt de l'expression (6.56) est qu'elle est économique à calculer puisqu'elle consiste en deux simples sommations (élevées au carré) au lieu d'une double sommation. Elle offre une forte similarité de forme avec la pseudo enveloppe au carré analysée en 2.1.4.

Dans le domaine spectral les équivalents sont (voir le paragraphe 3.3.3) :

Mode somme :

$$S_{F_{+k}^{(2)}}(\Omega) = 8 \int_0^{\Omega/2} S(\omega) S(\Omega - \omega) \|f_{+k}^{(2)}(\omega, \Omega - \omega, \beta)\|^2 d\omega \quad (6.57)$$

Mode différence :

$$S_{F_{-k}^{(2)}}(\Omega) = 8 \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \Omega) \|f_{-k}^{(2)}(\omega, \omega + \Omega, \beta)\|^2 d\omega \quad (6.58)$$

ou, lorsque l'on utilise l'approximation sus-mentionnée :

$$S_{F_{-k}^{(2)}}(\Omega) = 8 \int_0^\infty S(\omega) S(\omega + \Omega) f_{dk}(\omega, \beta) f_{dk}(\omega + \Omega, \beta) d\omega \quad (6.59)$$

La figure 6.23 présente un exemple de calcul du spectre des efforts de deuxième ordre à basse fréquence suivant l'une ou l'autre formulation (calcul exact des QTF ou approximation de Newman), pour la barge N'Kossa. On constate que les deux séries de valeurs sont pratiquement dans un rapport deux dès que Ω dépasse 0,1 rd/s.

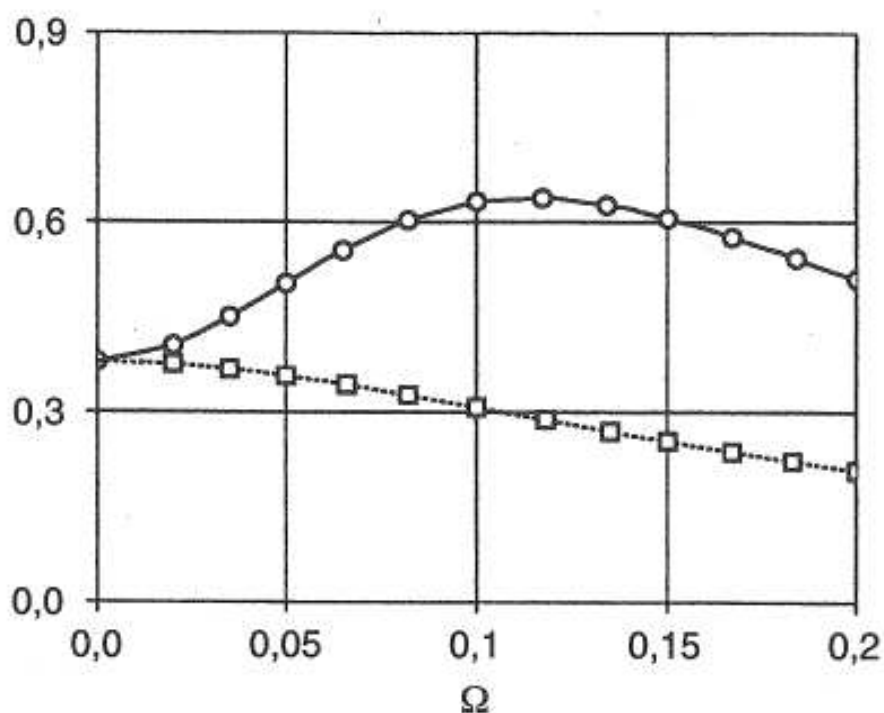


FIG. 6.23 – Barge N'Kossa. Spectre des efforts de deuxième ordre à basse fréquence en cavalemt en fonction de la pulsation Ω . Spectre de houle : JONSWAP, $H_S = 3,9$ m, $T_P = 15,5$ s, $\gamma = 2$. Trait continu : calcul exact. Pointillés : approximation de Newman.

Enfin, la valeur moyenne temporelle des efforts de deuxième ordre à basse fréquence s'écrit :

$$\overline{F_{-k}^{(2)}} = 2 \int_0^\infty S(\omega) f_{dk}(\omega, \beta) d\omega \quad (6.60)$$

Equivalence houle régulière - houle irrégulière pour les efforts moyens

Supposons une houle de spectre étroit, ou une «fonction de transfert» des efforts quadratiques suffisamment plate puisque l'on puisse la considérer comme constante lorsque la pulsation varie. On a alors :

$$\overline{F_{-k}^{(2)}} \simeq 2 \overline{f_{dk}(\beta)} \int_0^\infty S(\omega) d\omega$$

soit :

$$\overline{F_{-k}^{(2)}} \simeq \frac{H_S^2}{8} \overline{f_{dk}(\beta)} \quad (6.61)$$

La houle irrégulière «équivalent» donc, en ce qui concerne la valeur moyenne des efforts de dérive, à une houle régulière d'amplitude $H_S/(2\sqrt{2})$. Pour cette raison les déports moyens que l'on obtient en simulant un état de mer de design par une houle régulière équivalente d'amplitude égale au H_{\max} divisé par deux soit voisine du H_S sont complètement irréalistes.

6.6 Comportement d'ancrage

Dans cette partie on s'intéresse au mouvement horizontal des structures ancrées qui, comme on l'a déjà écrit, se décompose en trois composantes :

- un déport moyen sous l'effet des efforts moyens de houle, de vent et de courant ;
- un mouvement dit «incoercible» de réponse (linéaire) à la houle ;
- un mouvement de dérive lente aux fréquences propres du système : structure + ancrage, entretenu par les efforts de deuxième ordre à basse fréquence et les fluctuations des efforts de vent. Dans le cas des navires ancrés sur point unique, des comportements instables, dits de *fish-tailing*, peuvent aussi apparaître sous l'action seule du courant, ou d'un vent constant.

Les périodes des mouvements de dérive lente, typiquement, vont de une à plusieurs minutes, les raideurs d'ancrage étant faibles. En conséquence il n'y a pas lieu en général de tenir compte de ces raideurs d'ancrage dans le calcul des fonctions de transfert de la réponse linéaire de la structure considérée.

Bien que l'amplitude du mouvement de dérive lente l'emporte souvent largement sur celle du mouvement de réponse linéaire, les ancrages ont longtemps été dimensionnés (et le sont encore) en l'ignorant purement et simplement, ou, plus précisément, en en tenant compte implicitement via des coefficients de sécurité assez élevés.

6.6.1 La méthode traditionnelle de dimensionnement des ancrages

Il est en général d'usage de définir deux conditions d'environnement, l'une dite de survie (par exemple houle et vent centennaux + courant décennal), et l'autre dite «opérationnelle» (par exemple houle, vent et courant annuels).

On détermine alors les efforts d'ancrage associés, soit la somme (vectorielle) des efforts moyens de houle (dérive), de vent et de courant.

Pour les efforts de dérive sur houle on applique la relation :

$$\vec{F}_d = 2 \int_0^\infty S(\omega) \vec{f}_d(\omega, \beta) d\omega \quad (6.62)$$

où $S(\omega)$ est le spectre de l'état de mer considéré et $\vec{f}_d(\omega, \beta)$ l'effort de dérive normalisé à l'incidence considérée, obtenu, par exemple, à l'aide d'un code de diffraction-radiation, ou par des essais en bassin.

Bien que les efforts moyens de houle et de courant ne soient pas additifs on tient rarement compte des interactions entre houle et courant et on somme leurs effets calculés séparément.

Les efforts dus au courant peuvent être déterminés de plusieurs façons :

1. par des essais en bassin ou en soufflerie ;
2. par extrapolation à partir de résultats disponibles dans la littérature, eux-mêmes obtenus à partir d'essais en bassin ou en soufflerie ;
3. par un calcul approché, en éclatant la carène en éléments constitutifs simples (tranches de colonnes et de pontons), en affectant à chacun un coefficient de traînée approprié (fourni par les règlements pour quelques géométries de base), et en sommant les efforts de traînée élémentaires ;
4. par des moyens numériques lourds, à l'aide d'un modèle résolvant les équations de Navier-Stokes (CFD).

Pour les carènes de navire à incidence nulle, on peut, comme en architecture navale, utiliser le concept de plaque plane équivalente, de même longueur et de même surface développée. La force de frottement s'écrit alors :

$$F = \frac{1}{2} \rho C_f(\text{Re}) S U^2 \quad (6.63)$$

où S est la surface mouillée de la carène et où le coefficient de frottement C_f dépend du nombre de Reynolds $\text{Re} = U L/\nu$ basé sur la longueur L du navire. En régime laminaire ($\text{Re} < 10^5$) il est donné par la formule de Blasius :

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (6.64)$$

Le régime laminaire n'est guère vérifié que pour les très petites maquettes expérimentées en bassins d'essais. Pour les grandes maquettes, et au réel, l'écoulement est turbulent. On peut alors appliquer la formule de l'ITTC :

$$C_f = \frac{0,075}{(\log_{10}\text{Re} - 2)^2} \quad (6.65)$$

L'effort de friction ainsi calculé est habituellement multiplié par un facteur de forme $1+k$, où k typiquement est compris entre 0,2 et 0,4.

Cette approche suppose que l'écoulement reste attaché à la carène, donc que celle-ci soit bien profilée. Dans le cas de barges l'écoulement se sépare massivement à l'arrière, d'où l'apparition de forces de traînée qui l'emportent largement sur les forces de frottement.

Pour les supertankers (VLCC, *Very Large Crude Carriers*), il existe une base de données fournissant les efforts horizontaux dus au courant (et au vent), en fonction de son incidence et de la profondeur rapportée au tirant d'eau (OCIMF).

Les essais en bassin ou en soufflerie fournissent des résultats souvent considérés comme fiables, bien que la similitude de Reynolds ne soit pas respectée. Il peut en résulter une surévaluation des efforts pour les carènes ne présentant pas ou peu d'angles vifs (C_D de 1,2 pour un cylindre en régime subcritique contre 0,6 ou 0,7 en régime transcritique). La troisième méthode s'applique avec difficultés aux géométries complexes et ne rend pas compte, entre autres, des effets de masquage. Les efforts qu'elle fournit sont souvent nettement supérieurs

à ceux mesurés (elle permet par contre de tenir compte de la variation de la vitesse du courant dans la tranche d'eau, appréciable pour les structures à fort tirant d'eau). Enfin la voie purement numérique se heurte encore à des problèmes théoriques (modélisation de la turbulence) ou numériques, et est très gourmande en ressources informatiques pour des géométries tri-dimensionnelles complexes.

Pour le vent les problèmes qui se posent et les méthodes appliquées sont exactement les mêmes que pour le courant : essais en soufflerie, recours à la littérature, ou sommation d'efforts élémentaires sur les éléments constitutifs, cette dernière méthode permettant de tenir compte de la variation de la vitesse du vent avec l'altitude.

Le calcul du mouvement de réponse linéaire à la houle, dit incoercible (étant peu sensible aux raideurs d'ancrage), nécessite la détermination préalable des fonctions de transfert. Du spectre de houle et de ces fonctions de transfert (à l'incidence considérée) on déduit les spectres des six composantes du mouvement de la structure ou éventuellement (plus correct) ceux des trois composantes du mouvement des points d'attache des lignes d'ancrage sur la structure. On en déduit alors les maxima attendus au cours de l'état de mer considéré (voir paragraphe 5.5). En pratique on ne considère souvent que la seule composante horizontale du mouvement dans la direction de la houle.

Commence alors un processus itératif qui consiste à :

1. définir un système d'ancrage (nombre de lignes, composition, longueur, prétension, etc.) ;
2. en déduire, à l'aide d'un modèle d'ancrage statique :
 - pour chaque ligne la loi reliant la tension en tête au déport horizontal du chaumard ;
 - pour l'ensemble la loi reliant le rappel horizontal au déport de la structure ;
3. en tirer le déport horizontal moyen associé à l'effort d'ancrage ;
4. rajouter le mouvement incoercible et vérifier que les tensions obtenues dans les lignes sont acceptables, c'est à dire offrent un coefficient de sécurité suffisant vis à vis de leur tension de rupture. Ce coefficient de sécurité (défini comme le rapport de la tension de rupture à la tension maximale obtenue) est variable suivant l'état de mer considéré et suivant les règlements. Par exemple :
 - conditions opérationnelles, lignes intactes : 3
 - conditions opérationnelles, une ligne rompue : 2
 - conditions de survie, lignes intactes : 2
 - conditions de survie, une ligne rompue : 1,4.

Cette procédure est illustrée par la figure 6.24.

Les règlements acceptent, dans une certaine mesure, que les propulseurs soient utilisés pour soulager l'ancrage. On est alors autorisé à retrancher de l'effort moyen d'ancrage une certaine fraction de la poussée délivrée par les propulseurs.

Ce processus est répété jusqu'à obtention d'un ancrage satisfaisant. A noter qu'éventuellement d'autres facteurs, comme la présence de risers rigides ou même flexibles, viennent limiter le déport maximal admissible. L'hypothèse de comportement quasi-statique des lignes d'ancrage est aussi de plus en plus souvent remise en cause, en particulier en grande profondeur, et il est souhaitable de vérifier a posteriori son bien-fondé.

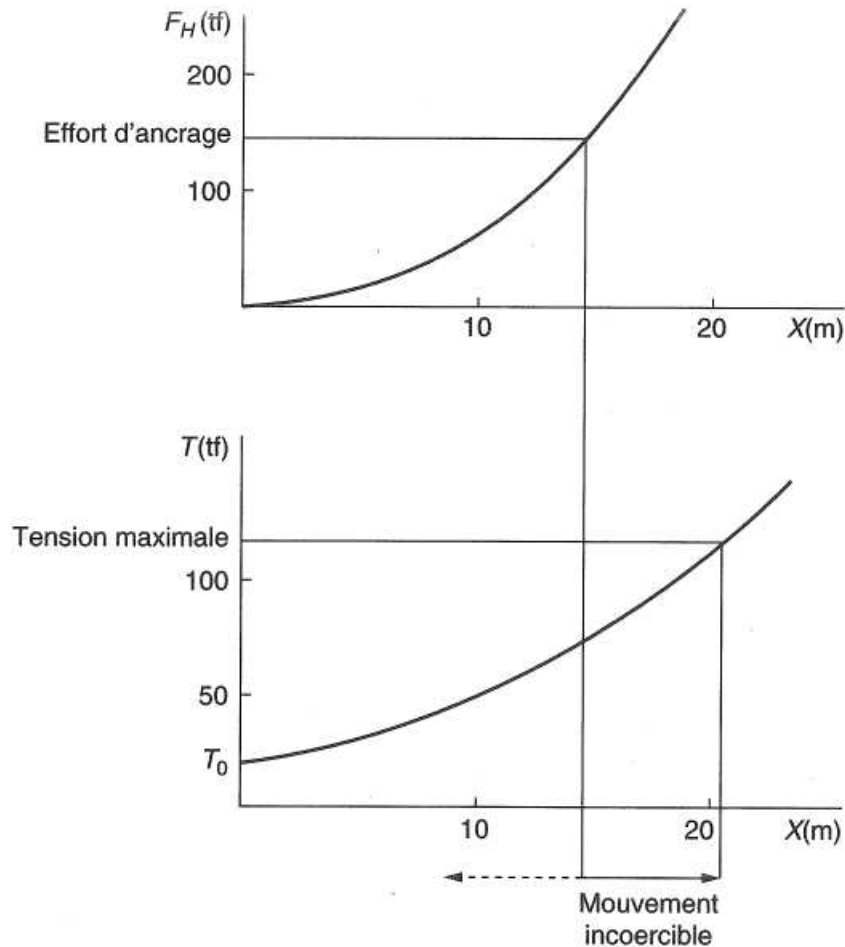


FIG. 6.24 – Illustration de la méthode traditionnelle de dimensionnement des ancres.

6.6.2 Prise en compte du mouvement de dérive lente

L'approche précédente peut se justifier pour les petites plates-formes semi-submersibles, dont les mouvements lents sont fortement amortis et pour lesquelles les efforts de dérive, aux grandes périodes de houle, sont faibles. Elle n'est pas satisfaisante pour les structures plus massives, comme les FPSO ou plates-formes sur lignes tendues, dont le mouvement de dérive lente l'emporte largement sur celui de réponse linéaire à la houle. Il est alors nécessaire de prendre en compte ce mouvement de dérive lente pour le dimensionnement de l'ancrage (ce qui permet éventuellement de réviser à la baisse les coefficients de sécurité).

Compte tenu de l'écart important entre les échelles de temps des deux types de mouvement (10 à 20 secondes pour la réponse à la houle, 10 à 20 fois plus pour la dérive lente) il est en général justifié de les découpler et de résoudre séparément les équations du mouvement de dérive lente.

Résolution fréquentielle

Dans le cas idéal où les équations du mouvement basse fréquence de la structure sont linéaires il est possible de les résoudre dans le domaine fréquentiel. On considère, pour sim-

plifier, le seul mouvement de cavement, régi par l'équation :

$$(M + M_a) \ddot{X}^{(2)} + B \dot{X}^{(2)} + K X^{(2)} = F_-^{(2)}(t) \quad (6.66)$$

M est la masse propre, M_a la masse ajoutée à pulsation nulle, B un amortissement de nature encore non identifiée, K la raideur d'ancrage et $F_-^{(2)}$ l'effort de deuxième ordre à basse fréquence.

Le système mécanique considéré étant linéaire, on peut relier le spectre de la réponse à celui de l'excitation par :

$$S_{X^{(2)}}(\Omega) = \frac{S_{F_-^{(2)}}(\Omega)}{[-(M + M_a)\Omega^2 + K]^2 + B^2\Omega^2} \quad (6.67)$$

De cette relation on peut par exemple tirer la variance de la réponse :

$$\sigma_{X^{(2)}}^2 = \int_0^\infty \frac{S_{F_-^{(2)}}(\Omega)}{[-(M + M_a)\Omega^2 + K]^2 + B^2\Omega^2} d\Omega \quad (6.68)$$

Lorsque l'amortissement B est faible devant l'amortissement critique (ce qui est généralement le cas des mouvements de dérive lente), l'essentiel de la réponse est concentré autour de la pulsation propre $\Omega_0 = \sqrt{K/(M + M_a)}$ et on peut approximer la variance par :

$$\sigma_{X^{(2)}}^2 \simeq S_{F_-^{(2)}}(\Omega_0) \int_0^\infty \frac{d\Omega}{[-(M + M_a)\Omega^2 + K]^2 + B^2\Omega^2}$$

soit :

$$\sigma_{X^{(2)}}^2 \simeq \frac{\pi S_{F_-^{(2)}}(\Omega_0)}{2B(M + M_a)\Omega_0^2} \quad (6.69)$$

On comprend bien sur ce résultat que des efforts «petits» peuvent entraîner une réponse importante dès lors que l'amortissement et la pulsation propre sont faibles. On prend conscience du rôle crucial joué par l'amortissement du système, et du besoin de le quantifier.

C'est ce problème que l'on aborde dans la section suivante.

6.7 Les amortissements des mouvements de dérive lente

Dans le calcul de la réponse linéaire des structures sur houle, étudiée au chapitre précédent, le seul amortissement pris en compte, et prédit par la théorie potentielle, est l'amortissement de radiation : la structure en mouvement forcé génère un champ de vagues, qui véhicule de l'énergie au loin. Ce n'est que pour la prédiction du roulis des barges et navire qu'il s'avère nécessaire de prendre en compte d'autres mécanismes, liés à la nature visqueuse du fluide : le frottement sur la carène et, surtout, la séparation de l'écoulement aux angles vifs (bouchains).

Lorsque la fréquence d'oscillation décroît, l'amortissement de radiation devient progressivement négligeable. Un critère, pour le mouvement de cavement des navires, est $\Omega_0 \sqrt{L/g} < 0,5$, Ω_0 étant la pulsation et L la longueur. Pour un tanker long de 300 m, cela signifie que l'amortissement de radiation est négligeable pour une période propre supérieure à 70 secondes. Ce n'est guère que pour des ancrages très raides qu'il convient de s'en soucier.

Sans doute par analogie avec le roulis on a longtemps pensé que le principal mécanisme dissipateur d'énergie, pour les mouvements de dérive lente, provenait des effets visqueux sur la carène : le frottement pour le mouvement de cavement des navires, et la traînée résultant de la séparation pour l'embarquée et le lacet. Ce n'est que relativement récemment que deux autres mécanismes ont été mis en évidence :

1. En réalisant des essais d'extinction¹ en cavement d'un modèle de tanker, Wichers & van Sluijs, en 1979, observent que l'amortissement sur houle régulière est supérieur à celui obtenu en eau calme (figure 6.25). Le surcroît d'amortissement dépend de la pulsation de la houle et, à pulsation donnée, varie comme le carré de son amplitude. C'est l'**amortissement de dérive**, lié à la sensibilité de la force de dérive à la vitesse d'avance et de recul de la structure.

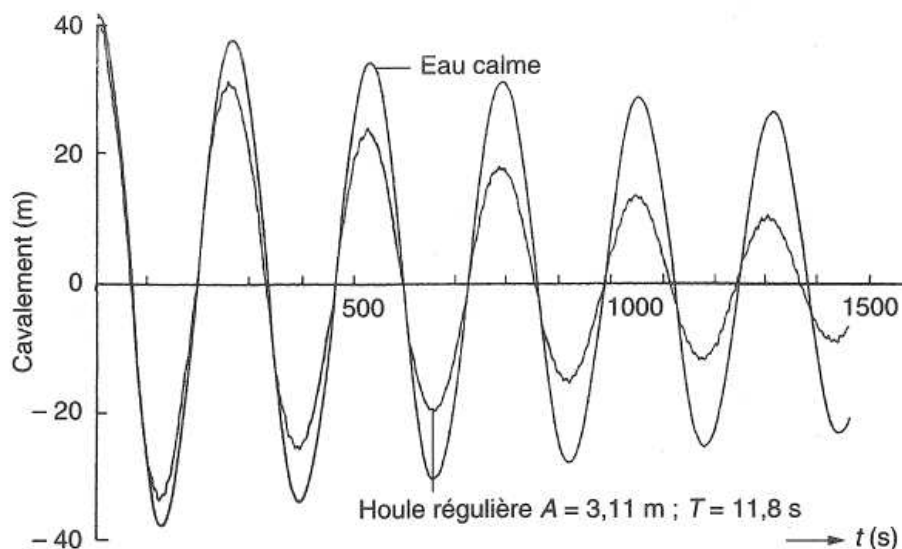


FIG. 6.25 – Essai d'extinction en cavement d'un tanker en eau calme et sur houle régulière.

1. Consistant à écarter le modèle de sa position d'équilibre et à le relâcher. Le mouvement qui s'ensuit prend l'allure d'une sinusoïde amortie, d'où il est aisé d'extraire période propre et amortissement.

2. En 1986, Huse présente des résultats expérimentaux sur les mouvements de dérive lente pris par deux plates-formes semi-submersibles, en houle irrégulière, les modèles étant considérés successivement avec leur ancrage (caténaire) et avec un ancrage aérien, de même raideur, sous forme de ressorts. Il observe que les mouvements lents sont fortement réduits avec l'ancrage caténaire. Dans un article subséquent (Huse & Matsumoto, 1989), il procède à des essais d'extinction en eau calme d'un modèle de tanker, en considérant les trois situations :

- ancrage aérien assuré par des ressorts ;
- ancrage caténaire ;
- ancrage caténaire avec mouvement forcé (en cavalement) du touret aux fréquences de houle (via un dispositif ad hoc embarqué sur le modèle).

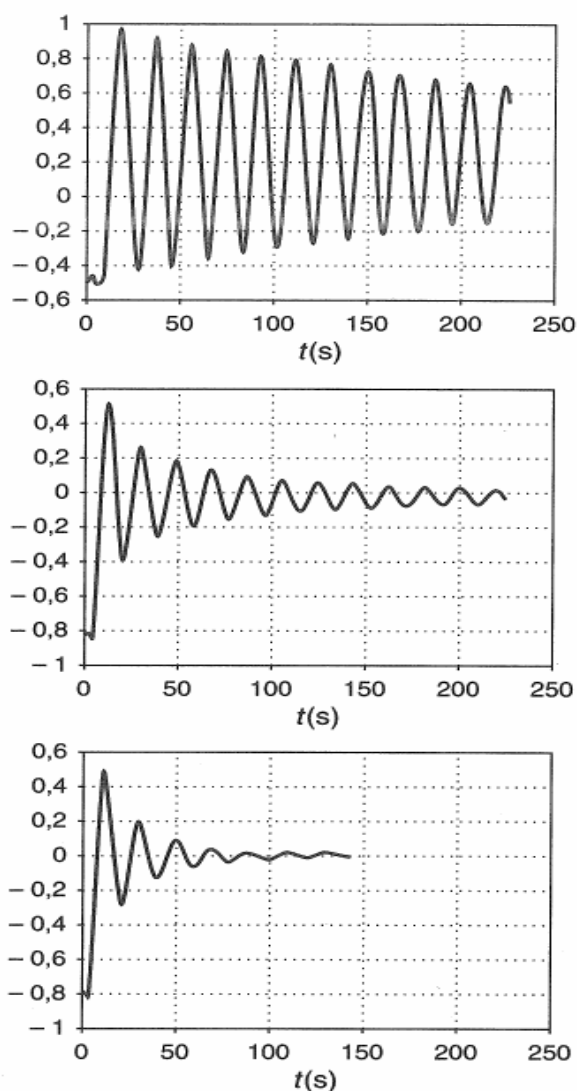


FIG. 6.26 – Essais d'extinction d'un tanker en eau calme. Ancrage aérien (haut), ancrage caténaire (milieu), ancrage caténaire avec mouvement imposé du touret aux fréquences de houle (bas).

Les mouvements de cavalement obtenus pour les trois configurations sont représentés sur la figure 6.26. Dans la première configuration la dissipation d'énergie provient du frottement

fluide sur la carène et de l'amortissement de dérive. On constate que le mouvement est bien davantage amorti lorsque les lignes d'ancrage sont représentées et que l'amortissement additionnel apporté par l'ancrage s'avère très sensible à la superposition d'un mouvement aux fréquences de houle.

Cette troisième composante est habituellement identifiée sous le nom d'**amortissement dû aux lignes d'ancrage**.

6.7.1 L'amortissement de dérive

Le concept d'amortissement de dérive résulte d'une application incohérente de la théorie de deuxième ordre. L'hypothèse sous-jacente au développement en série de perturbation est que les quantités d'ordre 1 sont petites (d'ordre ε) et celles d'ordre 2 encore plus petites (d'ordre ε^2). Or les efforts de deuxième ordre prédits par la théorie sont utilisés pour générer des mouvements d'amplitude bien supérieure à celle des mouvements de premier ordre. (A noter que ce problème ne se pose pas en mode somme, où les mouvements de deuxième ordre sont effectivement très petits).

Dans l'équation modèle du mouvement de dérive lente :

$$(M + M_a) \ddot{X}^{(2)} + B \dot{X}^{(2)} + K X^{(2)} = F_-^{(2)}(t) \quad (6.70)$$

on peut essayer d'améliorer la formulation de $F_-^{(2)}$ en la rendant dépendante de la position (lente) $X^{(2)}$ et de la vitesse (lente) $\dot{X}^{(2)}$ de la structure :

$$(M + M_a) \ddot{X}^{(2)} + B \dot{X}^{(2)} + K X^{(2)} = F_-^{(2)}(X^{(2)}, \dot{X}^{(2)}, t) \quad (6.71)$$

soit, en effectuant un développement de Taylor limité aux premiers termes :

$$(M + M_a) \ddot{X}^{(2)} + B \dot{X}^{(2)} + K X^{(2)} = F_-^{(2)}(0,0,t) + X^{(2)} \frac{\partial F_-^{(2)}(0,0,t)}{\partial X^{(2)}} + \dot{X}^{(2)} \frac{\partial F_-^{(2)}(0,0,t)}{\partial \dot{X}^{(2)}}$$

ou encore, en séparant valeurs moyennes (en temps) et valeurs fluctuantes :

$$\begin{aligned} (M + M_a) \ddot{X}^{(2)} + \left[B - \overline{\frac{\partial F_-^{(2)}(0,0,t)}{\partial \dot{X}^{(2)}}} \right] \dot{X}^{(2)} + \left[K - \overline{\frac{\partial F_-^{(2)}(0,0,t)}{\partial X^{(2)}}} \right] X^{(2)} = \\ = F_-^{(2)}(0,0,t) + X^{(2)} \frac{\partial F_-^{(2)}(0,0,t)}{\partial X^{(2)}} + \dot{X}^{(2)} \frac{\partial F_-^{(2)}(0,0,t)}{\partial \dot{X}^{(2)}} \end{aligned} \quad (6.72)$$

On en déduit que l'amortissement et la raideur du système peuvent se trouver affectés.

La variation éventuelle de raideur ne nous concerne pas dans le cadre de ce paragraphe, mais on peut observer en passant qu'elle se manifeste principalement pour les mouvements de pilonnement, roulis et tangage des structures à faible surface de flottaison et de grand déplacement. Les efforts de dérive verticaux dépendent en effet fortement de l'immersion. Des manifestations sont des instabilités dans la tenue d'immersion des sous-marins sous houle (la raideur initiale étant alors fournie par le système de pilotage), et une augmentation de la gîte pour les plates-formes semi-submersibles par houle de travers (le ponton «au vent» étant davantage attiré vers la surface libre que celui sous le vent, du fait de la gîte).

Il n'y a pas d'évidence expérimentale, pour l'instant, que des variations de raideur se produisent pour les degrés de liberté horizontaux. Par contre il y a, de toute évidence, une forte sensibilité des efforts de deuxième ordre à la vitesse de dérive lente, d'où le concept d'amortissement de dérive.

La houle incidente consistant en une sommation de houles d'Airy d'amplitudes A_j et pulsations ω_j , on peut écrire, comme pour l'effort moyen de dérive :

$$-\frac{\overline{\partial F_-^{(2)}(0,0,t)}}{\partial \dot{X}^{(2)}} = -\sum_j A_j^2 \frac{\partial f_d(\omega_j)}{\partial \dot{X}^{(2)}} = -2 \int_0^\infty S(\omega) \frac{\partial f_d(\omega)}{\partial \dot{X}^{(2)}} d\omega = 2 \int_0^\infty S(\omega) b_{d11}(\omega) d\omega \quad (6.73)$$

où $b_{d11}(\omega)$ est l'amortissement de dérive «unitaire» ($B_{dij} = A^2 b_{dij}$), défini au paragraphe 6.2.6, lors de l'étude de l'effet du courant sur les efforts de dérive. On considère donc que la vitesse lente d'avance de la structure équivaut à un courant directement opposé. Cette hypothèse n'est valable que dans la mesure où la vitesse lente varie peu sur une période de houle, donc si le ratio de la période propre aux périodes moyennes de houle est suffisamment grand. Cet aspect du problème a peu été exploré et il est difficile de donner une valeur minimale au rapport des deux périodes.

Expérimentalement, les deux points de vue ont été appliqués pour la détermination des amortissements de dérive :

1. Réaliser des essais d'extinction du mouvement de dérive lente, en eau calme puis sur houle régulière.

2. Mesurer les efforts moyens au point fixe, puis avec une petite vitesse d'avance (positive ou négative), la maquette étant entraînée par le chariot de traction. Par différentiation entre les résultats obtenus on accède à l'amortissement de dérive.

L'interprétation se heurte souvent à la difficulté que les efforts moyens d'origine visqueuse varient également et qu'il est impossible de séparer les deux contributions.

Jusqu'à maintenant on a considéré le cas simple d'un système à un degré de liberté. Dans le cas d'un mouvement plan quelconque, les trois degrés de liberté (cavalement, embardée, lacet) sont concernés et la connaissance des 9 termes $b_{dij}(\omega, \beta)$, i et j prenant les valeurs 1, 2, 6, est nécessaire.

On a vu au paragraphe 6.2.6 que la détermination rigoureuse des termes b_{d11} , b_{d12} , b_{d21} , b_{d22} procède de la résolution du problème de diffraction-radiation avec petite vitesse d'avance. Il est possible d'étendre la théorie au cas d'une vitesse lente en lacet. Finne et Grue (1998) obtiennent ainsi les 9 termes de la matrice, dont en particulier b_{d66} qui représente l'amortissement en lacet. Ils argumentent, sur la base des valeurs numériques qu'ils obtiennent pour un navire de type FPSO, que l'amortissement de dérive en lacet est important, au moins comparable à l'amortissement visqueux.

Pour ce qui est des formules approchées d'Aranha, il ne paraît pas possible de les étendre aux termes manquants, en particulier b_{d66} , sauf via une théorie des tranches (pour les navires) qui ne semble pas fournir de bons résultats.

La question qui se pose est donc de savoir s'il importe vraiment de connaître l'amortissement de dérive en lacet, et si l'argumentation de Finne et Grue, vis à vis de l'amortissement

visqueux, est bien fondée. C'est là un problème encore ouvert.

Faute de disposer du modèle de Finne et Grue, il est tentant de se limiter aux termes b_{di1} , b_{di2} , $i = 1, 2, 6$, et d'utiliser les formules d'Aranha qui offrent le grand avantage de ne requérir que la connaissance des efforts de dérive sur houle régulière. Elles sont de plus bien adaptées au calcul des mouvements de dérive lente, en fréquentiel et en temporel.

On applique donc :

$$b_{di1} = \left(\frac{4\omega}{g} f_{di} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial f_{di}}{\partial \omega} \right) \cos \beta - \frac{2\omega}{g} \frac{\partial f_{di}}{\partial \beta} \sin \beta \quad (6.74)$$

$$b_{di2} = \left(\frac{4\omega}{g} f_{di} + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial f_{di}}{\partial \omega} \right) \sin \beta + \frac{2\omega}{g} \frac{\partial f_{di}}{\partial \beta} \cos \beta \quad (6.75)$$

i prenant les valeurs 1, 2 et 6. La profondeur d'eau est ici supposée grande ($kh > 3$). La modification à apporter en faible profondeur d'eau est donnée au paragraphe 6.2.6 (expression 6.28). Pour un état de mer donné d'incidence β les amortissements de dérive moyens s'obtiennent par :

$$B_{dij}(\beta) = 2 \int_0^\infty S(\omega) b_{dij}(\omega, \beta) d\omega \quad (6.76)$$

La différentiation numérique de f_d vis à vis de la pulsation ω peut s'éviter via une intégration par parties. Par exemple, pour une incidence nulle ($\beta = 0$), on obtient :

$$B_{d11} = \frac{2}{g} \int_0^\infty \omega f_{d1}(\omega) \left(2S(\omega) - \omega \frac{\partial S}{\partial \omega} \right) d\omega \quad (6.77)$$

expression plus commode à appliquer, le spectre $S(\omega)$ étant habituellement connu sous forme analytique.

6.7.2 L'amortissement dû aux lignes d'ancrage

Les lignes d'ancrage contribuent à l'amortissement des mouvements de dérive lente de plusieurs manières :

- par leur frottement sur le fond marin ;
- par dissipation interne d'énergie ;
- par les forces de traînée qu'elles subissent dans leur mouvement.

On s'intéresse ici à ce troisième effet. C'est celui mis en évidence expérimentalement par Huse.

Pour cela on considère la situation très schématique d'une structure flottante retenue par une ligne caténaire. Toutes deux sont dans le même plan vertical $y = 0$. Sous l'action des vagues, la structure prend un mouvement de réponse linéaire à la houle, qui induit un mouvement $(x_C^{(1)}(t), z_C^{(1)}(t))$ au niveau du chaumard. Il s'y superpose un mouvement de dérive lente $X^{(2)}(t)$. Ces mouvements entraînent une réponse dynamique de la ligne, aux fréquences de houle et à basse fréquence, dans un fluide lui-même en mouvement. Il en résulte, le long

de la ligne, des forces de traînée dissipatrices d'énergie. Cette énergie dissipée peut être reliée au travail fourni en tête de ligne.

On peut exploiter cette approche énergétique pour aboutir à une expression de l'amortissement basse fréquence induit par la ligne, moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, pas toujours satisfaites en pratique :

1. La ligne répond de façon linéaire à sa sollicitation en tête. On introduit les fonctions de transfert $\alpha(\omega, s)$ et $\gamma(\omega, s)$ reliant le mouvement transversal local de la ligne au mouvement $(x_C(t), z_C(t))$ en tête. Plus spécifiquement, si

$$(x_C(t), z_C(t)) = \Re \left\{ (a_{x_C}, a_{z_C}) e^{-i\omega t} \right\} \quad (6.78)$$

alors

$$v(s, t) = \Re \left\{ -i\omega \left(\alpha(\omega, s) a_{x_C} + \gamma(\omega, s) a_{z_C} \right) e^{-i\omega t} \right\} \quad (6.79)$$

où $v(s, t)$ est la vitesse de la ligne dans la direction transverse à l'abscisse curviligne s comptée à partir de l'ancre.

2. La réponse de la ligne au mouvement basse fréquence est quasi-statique :

$$V^{(2)}(s, t) = \alpha(0, s) \dot{X}^{(2)}(t) \quad (6.80)$$

3. Les vitesses transverses induites par le mouvement de réponse linéaire à la houle sont d'un ordre de grandeur supérieures à celles induites par le mouvement lent :

$$|v^{(1)}(s, t)| \gg |V^{(2)}(s, t)| \quad (6.81)$$

On néglige la présence d'un courant éventuel, ou, plus exactement, on suppose que sa vitesse est également petite devant les vitesses transverses aux fréquences de houle :

$$|v^{(1)}(s, t)| \gg U_C \quad (6.82)$$

4. Les mouvements basse fréquence et aux fréquences de houle ne sont pas corrélés :

$$E \left\{ X^{(2)}(t) x_C^{(1)}(t) \right\} = E \left\{ X^{(2)}(t) z_C^{(1)}(t) \right\} \equiv 0 \quad (6.83)$$

Enfin, dans un premier temps, on suppose que la ligne oscille dans un fluide au repos.

La force de traînée qui s'applique sur un élément de ligne de longueur ds est donnée par

$$dF = -\frac{1}{2} C_D \rho D \left| v^{(1)}(s, t) + V^{(2)}(s, t) \right| \left(v^{(1)}(s, t) + V^{(2)}(s, t) \right) ds \quad (6.84)$$

La ligne étant de faible diamètre devant l'amplitude de son mouvement il est licite d'ajouter les deux composantes de la vitesse transversale dans l'expression de la force de traînée.

La vitesse basse fréquence $V^{(2)}$ étant supposée faible devant $v^{(1)}$ on peut remplacer le produit $|v^{(1)} + V^{(2)}| (v^{(1)} + V^{(2)})$ par son développement de Taylor au voisinage de $V^{(2)} = 0$:

$$|v + V| (v + V) = v |v| + 2 |v| V + O(V^2) \quad (6.85)$$

où, pour plus de clarté, on a omis les exposants ⁽¹⁾ et ⁽²⁾. Les lettres majuscules se réfèrent au mouvement basse fréquence et les minuscules au mouvement aux fréquences de houle.

Seul le deuxième terme participe à l'amortissement du mouvement basse fréquence.

Pour ce mouvement la puissance moyenne dissipée par les forces de traînée le long de la ligne s'obtient donc par :

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^l C_D \rho D |v(s,t)| V^2(s,t) ds \quad (6.86)$$

Cette expression peut être simplifiée en tirant parti de ce que les deux échelles de temps sont différentes et de ce que $v(s,t)$ est un processus gaussien :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |v(s,t)| V^2(s,t) dt \simeq \overline{|v(s,t)|} \int_{t_0}^{t_0+T} V^2(s,t) dt \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_v(s) \int_{t_0}^{t_0+T} V^2(s,t) dt \quad (6.87)$$

où la barre $\overline{|v|}$ signifie valeur moyenne en temps.

La puissance moyenne P s'exprime finalement par :

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho \int_0^l C_D D \sigma_v(s) \alpha^2(0,s) ds \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \dot{X}^{(2)2} dt \right\} \quad (6.88)$$

On en déduit que l'amortissement du mouvement de dérive lente, dû aux forces de traînée sur la ligne d'ancrage, est donné par :

$$B_{a11} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho \int_0^l C_D D \sigma_v(s) \alpha^2(0,s) ds \quad (6.89)$$

avec

$$\sigma_v^2(s) = \int_0^\infty \left\| \alpha(\omega,s) f_{xC}^{(1)}(\omega) + \gamma(\omega,s) f_{zC}^{(1)}(\omega) \right\|^2 \omega^2 S(\omega) d\omega \quad (6.90)$$

$f_{xC}^{(1)}(\omega)$ et $f_{zC}^{(1)}(\omega)$ étant les fonctions de transfert des mouvements horizontaux et verticaux au chaumard, et $S(\omega)$ le spectre de houle.

Dans certaines configurations de chaînettes, un petit déport horizontal en tête se traduit par de grands mouvements transverses de la ligne en partie basse (figure 6.27). Cela signifie une grande valeur de $\alpha(\omega,s)$, qui intervient dans l'expression de l'amortissement par sa puissance troisième. On comprend que l'amortissement induit puisse alors devenir significatif.

Les développements ci-dessus font aussi ressortir l'effet du couplage avec les mouvements aux fréquences de houle, qui augmente la puissance moyenne dissipée d'un facteur $2|v^{(1)}|/|V^{(2)}|$ par rapport à ce que l'on obtient avec le mouvement basse fréquence seul.

6.7.3 Amortissement visqueux sur la carène

Malgré les apparences, il s'agit là de la composante la plus difficile à estimer en pratique. Cette difficulté tient à la variété des formes géométriques rencontrées (barges, tankers, plates-formes semi-submersibles), à la nature variable des efforts d'origine visqueuse (frottement ou traînée) et à la difficulté de les formuler lorsque plusieurs écoulements (aux fréquences de houle, à basse fréquence, courant) se trouvent superposés à de petits nombres de Keulegan-Carpenter.

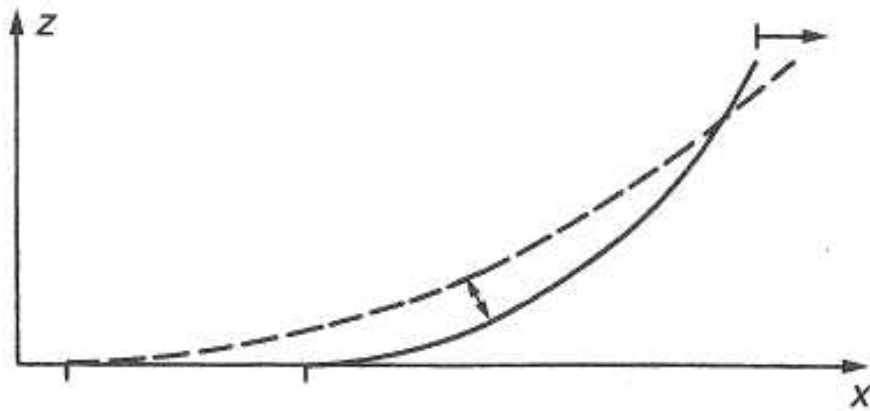


FIG. 6.27 – Effet d'un déport horizontal en tête sur le mouvement transversal d'une ligne caténaire.

On peut distinguer deux cas génériques :

– Celui du tanker ancré sur point unique, face aux éléments, le mouvement basse fréquence se limitant au cavement. Sa carène étant relativement bien profilée, l'amortissement visqueux provient principalement du frottement fluide.

– Celui de la barge, ou du ponton de plate-forme semi-submersible, par houle de travers. Le problème se ramène alors à celui de la formulation des forces de traînée sur une forme géométrique rectangulaire (à angles vifs ou arrondis), en mouvement combiné aux fréquences de houle et à basse fréquence. La différence essentielle, par rapport au cas précédent des lignes d'ancrage, est que les amplitudes du mouvement relatif des particules fluides sont faibles devant les dimensions propres de la structure. Il s'ensuit que la formulation des forces de traînée en vitesse relative n'est pas applicable.

On considère ici successivement chacun de ces deux cas.

Amortissement en cavement des carènes de navire

Comme pour le problème de résistance à l'avancement, on peut se ramener au concept de plaque plane équivalente. Il est important de réaliser qu'un écoulement se renversant périodiquement n'a rien à voir avec une vitesse d'avance constante ou un courant. Dans ce second cas la couche limite se développe à partir du bord d'attaque, le coefficient de friction local dépend du nombre de Reynolds $Re(x) = Ux/\nu$, basé sur la distance x au bord d'attaque. Dans le cas d'un écoulement variant en temps de façon sinusoïdale, soit $U = A\omega \cos\omega t$, le coefficient de friction local dépend du «nombre de Reynolds oscillant» $Re_o = A^2\omega/\nu$.

En régime laminaire la résolution de ce problème est aisée car les termes convectifs (non linéaires) des équations de Navier-Stokes disparaissent naturellement. On obtient que la contrainte de friction est donnée par :

$$\tau = \rho A \omega \sqrt{\omega \nu} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.91)$$

et se trouve donc déphasée de 45 degrés par rapport à la vitesse. Lorsque l'on veut exprimer la dissipation d'énergie, un coefficient modérateur de $\sqrt{2}/2$ est à appliquer au module de la

contrainte, ce qui conduit au coefficient de friction «efficace» :

$$C_f = \sqrt{\frac{2}{Re_o}} \quad (6.92)$$

et à l'amortissement en cavalement :

$$B_{v11} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sqrt{\omega \nu} S \quad (6.93)$$

S étant la surface de la plaque.

Pour des plaques planes, ces résultats théoriques sont bien confirmés par l'expérience, tant que l'écoulement reste laminaire. La transition à la turbulence apparaît pour un nombre de Reynolds oscillant de l'ordre de $3 \cdot 10^5$ (pour une surface lisse).

Si l'on considère un FPSO effectuant des oscillations basse fréquence en cavalement d'amplitude de l'ordre de 10 mètres et de période de l'ordre de 200 secondes, le nombre de Reynolds oscillant est de $3 \cdot 10^6$: l'écoulement est turbulent. Si l'on fait des essais en bassin à l'échelle du cinquantième, suivant la similitude de Froude, le nombre de Reynolds se trouve divisé par $50^{3/2}$ et chute à 10^4 (environ) : l'écoulement est laminaire.

De fait les amortissements déduits d'essais d'extinction sur des maquettes sont en assez bon accord avec l'expression théorique, si l'on applique un coefficient multiplicatif $1 + k$, où k est compris entre 0,5 et 1. Il est probable que ces valeurs élevées du coefficient k sont principalement dues à des effets de séparation de l'écoulement à la proue et à la poupe.

Un résultat important déduit du modèle de plaque plane en régime laminaire est le caractère linéaire de la force de friction : si la plaque effectue un mouvement bichromatique, somme de deux mouvements sinusoïdaux, les efforts de friction sont additifs. On est tenté de conclure, pour la maquette de FPSO en cavalement, que l'amortissement visqueux du mouvement basse fréquence est inchangé, que la maquette oscille en eau calme ou sur houle régulière. Ce résultat est apparemment bien vérifié en pratique puisque la différence des amortissements observés, en eau calme et sur houle régulière, est interprétée comme un amortissement de dérive, et que cet amortissement de dérive se compare assez bien aux valeurs calculées.

Il en va tout autrement à l'échelle du réel, où la couche limite oscillante est turbulente.

Pour une plaque en mouvement harmonique à grand nombre de Reynolds oscillant, tel que le régime turbulent soit atteint ($Re_o > 6 \cdot 10^5$), on trouve dans la littérature différentes expressions du coefficient de friction. Par exemple :

$$C_f = 0,09 Re_o^{-0,2} \quad (\text{Jonsson, 1966}) \quad (6.94)$$

ou

$$C_f = 0,024 Re_o^{-0,123} \quad (\text{Justesen, 1988}) \quad (6.95)$$

Le déphasage entre la force de friction et la vitesse est apparemment plus faible qu'en régime laminaire. Ici on le supposera nul.

Si l'on considère maintenant le problème de la superposition d'un mouvement basse fréquence et d'un mouvement aux fréquences de houle, la principale implication du régime turbulent est que les efforts de friction ne sont plus découplés. Il existe une littérature abondante sur le problème relativement voisin de la couche limite associée à la houle et au courant sur le fond marin. Il y apparaît que le frottement moyen, en houle plus courant, est bien supérieur à sa valeur en courant seul.

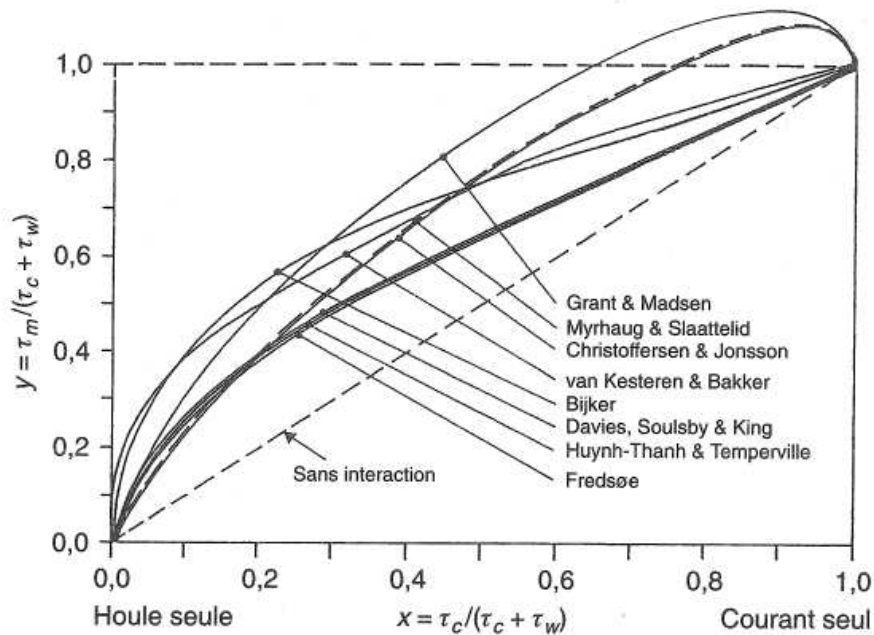


FIG. 6.28 – *Frottement sur le fond marin en houle plus courant. Contrainte moyenne τ_m en houle plus courant comparée à la contrainte moyenne τ_c en courant seul.*

La figure 6.28 présente la contrainte de cisaillement moyen τ_m en houle plus courant en fonction du cisaillement moyen τ_c en courant seul, calculée suivant différents modèles théoriques. τ_m et τ_c sont normalisés par la somme $\tau_c + \tau_w$ du cisaillement moyen en courant seul et de l'amplitude du cisaillement oscillant en houle régulière. Ces résultats sont relatifs à des valeurs particulières des ratios z_0/h et A/z_0 , h étant la profondeur, z_0 la hauteur de rugosité et A l'amplitude du mouvement fluide sur le fond (ici $z_0/h = z_0/A = 10^{-4}$ soit un fond très peu rugueux). Les différentes courbes correspondent à différents modèles théoriques. On constate qu'elles présentent des différences mais qu'elles s'accordent à prédire une augmentation de la contrainte moyenne, en particulier lorsque $\tau_c/(\tau_c + \tau_w)$ est petit, c'est à dire lorsque la vitesse de houle est dominante devant celle du courant.

L'extrapolation de ces résultats à notre problème n'est pas évidente car il y a une forte différence entre la couche limite associée à un courant et celle associée à un mouvement quasi sinusoïdal à basse fréquence. Il est quand même permis de penser que le même effet devrait se retrouver, à savoir qu'au réel l'amortissement d'origine visqueuse du mouvement basse fréquence est fortement accru sur houle, par rapport à sa valeur en eau calme.

Amortissement visqueux sur les pontons de plates-formes semi-submersibles

On considère maintenant le «second cas générique», qui est celui des éléments constitutifs d'une plate-forme semi-submersible (ou d'une TLP), par houle de travers. On cherche à exprimer l'amortissement basse fréquence induit par les efforts de traînée, plus particulièrement sur les pontons. On applique une théorie des tranches, on se place dans un plan transverse à l'axe de la colonne ou du ponton.

D'un point de vue cinématique, il est équivalent de considérer une tranche de ponton (ou de colonne) en mouvement forcé dans un fluide au repos, si l'on admet que l'écoulement

incident induit par la houle est localement uniforme. Ce mouvement consiste en un mouvement de dérive lente, horizontal, et un mouvement relatif de réponse linéaire à la houle, de composantes horizontale et verticale.

Ce problème diffère de celui des forces de traînée sur les lignes d'ancrage car les dimensions des éléments considérés sont du même ordre de grandeur, voire plus grandes, que les amplitudes du mouvement relatif par rapport au fluide. Il en résulte que, pour les formes sans angles vifs, l'écoulement peut rester attaché. Si des tourbillons sont produits, ils ne sont pas convectés au loin, mais réabsorbés et réémis à chaque renverse du mouvement.

On a présenté au chapitre 4 des résultats expérimentaux relatifs au cercle et au carré, en écoulement harmonique, à faible nombre de Keulegan-Carpenter. Pour le cercle, l'écoulement reste attaché pour des valeurs de K_C en deçà d'un certain seuil, dépendant du paramètre de Stokes $\beta = D^2/(\nu T)$. A l'échelle du réel, pour une colonne de plate-forme semi-submersible, le diamètre D est de l'ordre de 10 mètres et la période T de l'ordre de 10 ou 100 secondes suivant que l'on considère le mouvement aux fréquences de houle ou celui de basse fréquence. Cela signifie des valeurs de β de l'ordre de 10^6 ou 10^7 et des couches limites turbulentes. Les résultats expérimentaux disponibles montrent que la séparation se produit alors pour une valeur de K_C de l'ordre de 4 ou 5, et que, pour une surface lisse, les coefficients de traînée au voisinage de $K_C \simeq 5$ sont très faibles : des valeurs de l'ordre de 0,1 sont reportées à des valeurs de β de 10^5 (cf la figure 4.21). Il est probable qu'elles sont encore plus basses à 10^6 ou 10^7 .

Pratiquement cela signifie qu'à l'échelle du réel, pour des colonnes de section circulaire, on ne doit pas attendre d'amortissement significatif tant que les nombres de Keulegan-Carpenter sont inférieurs à 5, soit lorsque l'amplitude du mouvement (relatif) fluide reste inférieure au diamètre. A noter qu'il en va tout autrement à l'échelle du bassin où le paramètre β est divisé par le facteur d'échelle à la puissance $3/2$: d'une part le seuil de séparation est abaissé ($K_C \simeq 2$ pour $\beta \simeq 1000$), d'autre part les coefficients de traînée sont plus élevés.

Dès que la structure considérée présente des angles vifs, l'écoulement se sépare et on obtient, expérimentalement, des coefficients de traînée qui augmentent de manière monotone lorsque le paramètre K_C décroît. Pour un carré des valeurs de l'ordre de 4 sont atteintes asymptotiquement lorsque K_C tend vers zéro, à viscosité nulle (Bearman *et al.*, 1985). Le frottement dans la couche limite (et l'effet de celle-ci sur les forces de pression) expliquent des valeurs mesurées supérieures (figure 4.22), en particulier lors d'essais à petite échelle.

Le problème qui se pose maintenant est la manière d'exprimer les efforts de traînée en écoulement non harmonique, en particulier pour la superposition de deux mouvements de périodes très différentes.

Il est facile de se convaincre, expérimentalement, que la formulation en vitesse relative (ou en écoulements dépendants) doit être abandonnée, car trop «optimiste». Pour cela on se réfère aux figures 6.29 et 6.30, qui illustrent le cas d'un carré de 0,35 m de côté, en mouvement forcé «bichromatique». Un mouvement harmonique de période 1,75 secondes et K_C égal à 1 est superposé à un mouvement de période 10 secondes et K_C égal à 3. Ces deux composantes symbolisent les deux mouvements aux fréquences de houle et à basse fréquence. Sur la figure 6.29 est présenté le produit $|v + V| (v + V)$, en fonction du temps, où v désigne la vitesse haute fréquence et V la vitesse basse fréquence. On distingue nettement les deux composantes fréquentielles. L'effort mesuré est traité par analyse harmonique, limitée aux

termes en $\cos \Omega t$, $\sin \Omega t$, $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, où Ω est la pulsation du mouvement lent et ω celle du mouvement rapide. La vitesse horizontale étant prise sous la forme :

$$v(t) + V(t) = a \omega \cos \omega t + A \Omega \cos \Omega t$$

les termes en sinus correspondent aux efforts inertiels, ceux en cosinus aux efforts dissipateurs d'énergie.

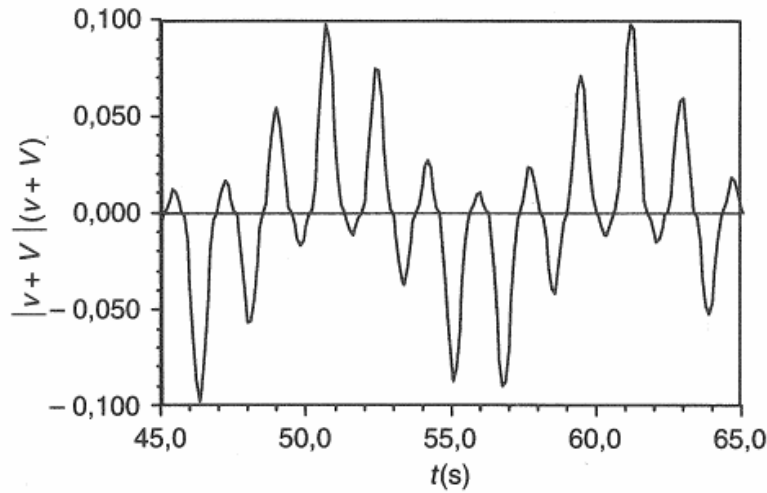


FIG. 6.29 – Carré en mouvement forcé bichromatique. Produit $|v+V|(v+V)$ en fonction du temps.

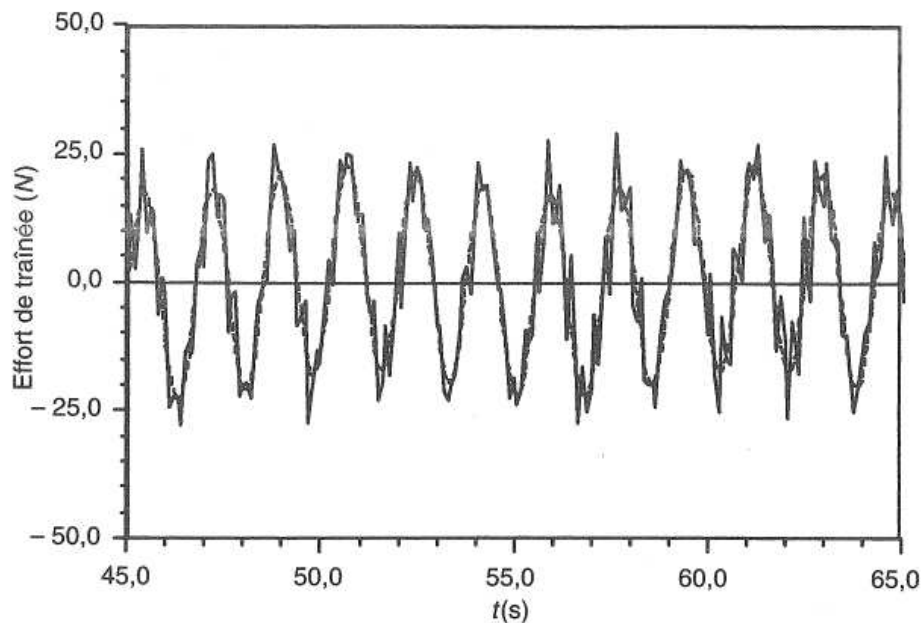


FIG. 6.30 – Carré en mouvement forcé bichromatique. Effort de traînée en fonction du temps.

Sur la figure 6.30 on présente ces efforts de traînée, obtenus via l'analyse harmonique et aussi en retranchant à l'effort total mesuré les efforts d'inertie reconstitués. La différence

entre les deux courbes est principalement due à des vibrations du support. On constate que l'effort de traînée a une allure très différente du signal $|v + V|$ ($v + V$) : la composante basse fréquence a pratiquement disparu. Adopter une formulation en écoulements dépendants des efforts de traînée conduit donc à une surévaluation des amortissements basse fréquence.

Une alternative est la formulation dite en écoulements indépendants :

$$dF = \left\{ \frac{1}{2} \rho C_{Dbf} D V(t) |V(t)| + \frac{1}{2} \rho C_{Dhf} D v(t) |v(t)| \right\} dl \quad (6.96)$$

On peut alors exploiter les essais effectués en mouvement bichromatique pour en déduire le coefficient C_{Dbf} et le comparer à sa valeur en mouvement harmonique. On présente sur la figure 6.36 les résultats obtenus pour différents types de mouvement haute fréquence. Le paramètre représenté est non pas le coefficient de traînée mais le coefficient d'amortissement, relié au précédent par :

$$C_a = \frac{2 K_C}{3 \pi^2} C_D \quad (6.97)$$

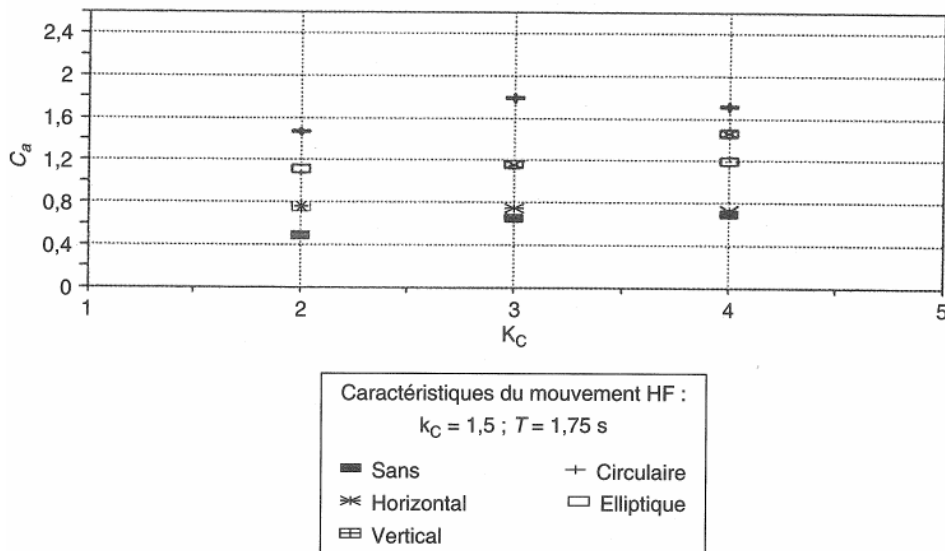


FIG. 6.31 – Carré en mouvement lent horizontal combiné à un mouvement rapide. Coefficient d'amortissement du mouvement lent en fonction du type de mouvement rapide et du nombre de Keulegan-Carpenter du mouvement lent.

La période du mouvement lent est 10 secondes, celle du mouvement rapide 1,75 secondes, l'amplitude du mouvement rapide est constante, telle que $k_C = 2 \pi a / D = 1,5$. Les types de mouvement rapide considérés sont :

- horizontal seul
- vertical seul
- circulaire
- elliptique (amplitude de la composante verticale divisée par deux).

Ces deux derniers cas semblent représenter de manière assez réaliste l'écoulement relatif, aux fréquences de houle, autour d'un ponton de plate-forme semi-submersible. On constate

que le mouvement rapide horizontal pur conduit à des coefficients d'amortissement pratiquement inchangés, mais que des augmentations sensibles sont obtenues dans les autres cas.

L'application de la formulation en écoulements indépendants semble donc pécher par excès de pessimisme. Il est malheureusement difficile d'en produire des améliorations, qui tiennent compte des paramètres, fort nombreux, de l'écoulement, et de la géométrie du corps considéré. Elle a, en sa faveur, le mérite de la simplicité et la qualité d'être du côté «conservatif». C'est donc celle qui est habituellement adoptée.

Annexe A

HYDROSTATIQUE

On effectue ici quelques rappels sur les efforts hydrostatiques, dus à la composante

$$p = p_0 - \rho g z \quad (\text{A.1})$$

de la pression, $z = 0$ étant le plan de surface libre (au repos) et p_0 la pression atmosphérique. On suppose que les structures considérées sont indéformables.

On traite d'abord le cas simple de corps complètement immergés, puis celui de corps perçant la surface libre. Dans les deux cas on prend comme point de référence, pour exprimer le torseur des efforts, le centre de gravité.

A.1 Corps complètement immergé

A.1.1 Expression du rappel hydrostatique

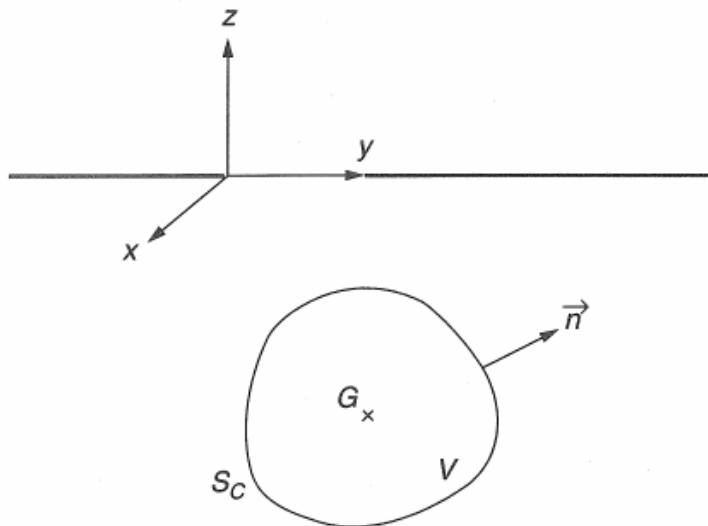


FIG. A.1 –

Le torseur des efforts hydrostatiques s'obtient en intégrant la pression sur la surface

mouillée S_C . Il consiste en une force \vec{F} et un couple \vec{C} :

$$\vec{F} = - \iint_{S_C} p \vec{n} \, dS = - \iint_{S_C} (p_0 - \rho g z) \vec{n} \, dS \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{C} = - \iint_{S_C} p \overrightarrow{GP} \wedge \vec{n} \, dS = - \iint_{S_C} (p_0 - \rho g z) \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix} \wedge \vec{n} \, dS \quad (\text{A.3})$$

\vec{C} étant exprimé par rapport au centre de gravité. Dans cette annexe \vec{n} est la normale **extérieure**, orientée de la carène vers le fluide.

Ces expressions peuvent être transformées par l'application des formules dites du gradient et du rotationnel :

$$\iint_{S_C} f \vec{n} \, dS = \iiint_V \nabla f \, dV \quad (\text{A.4})$$

$$\iint_{S_C} \vec{n} \wedge \vec{f} \, dS = \iiint_V \text{Rot } \vec{f} \, dV \quad (\text{A.5})$$

où V est le domaine intérieur à la carène.

Il vient alors :

Pour l'effort \vec{F} :

$$\vec{F} = \rho g \iiint_V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, dV = \rho g \forall \vec{k} \quad (\text{A.6})$$

où \forall est le volume déplacé et \vec{k} le vecteur unitaire vertical. C'est le **théorème d'Archimède** : tout corps **entièrement** plongé dans l'eau reçoit une poussée verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du volume d'eau déplacé.

Et pour le couple \vec{C} :

$$\vec{C} = \iiint_V \text{Rot} \left\{ (p_0 - \rho g z) \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix} \right\} \, dV$$

Soit, comme :

$$\text{Rot} (A \vec{B}) = A \text{Rot } \vec{B} + \nabla A \wedge \vec{B} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \vec{C} &= -\rho g \left\{ \iiint_V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix} \, dV \right\} \\ \vec{C} &= \left\{ \frac{1}{\forall} \iiint_V \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix} \, dV \right\} \wedge (\rho g \forall \vec{k}) = \overrightarrow{GB} \wedge \vec{F} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

où B , de coordonnées (X_B, Y_B, Z_B) , est le barycentre du volume déplacé.

Cette expression exprime que la poussée hydrostatique $\rho g \forall \vec{k}$ s'applique au point B^1 , dénommé **centre de carène**, ou **centre de poussée**. Pour un corps indéformable, c'est un point invariable dans un repère qui lui est lié.

A.1.2 Stabilité

Cas où il n'y a pas d'action extérieure

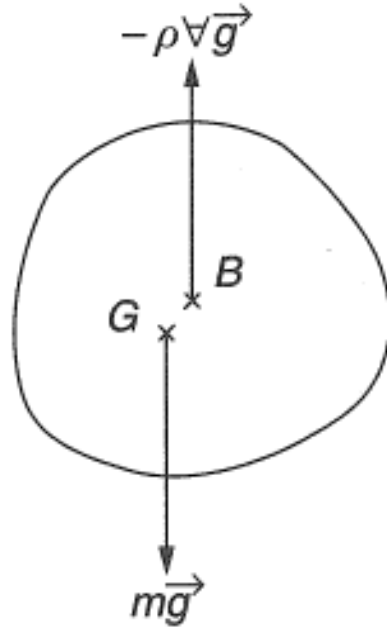


FIG. A.2 –

Les efforts qui s'exercent sur le corps se réduisent au poids propre $-m g \vec{k}$ appliqué au centre de gravité G , et à la poussée hydrostatique $\rho g \forall \vec{k}$, appliquée au centre de carène B .

La nullité de la résultante verticale implique que la masse propre soit égale au déplacement :

$$m = \rho \forall \quad (\text{A.9})$$

La nullité du couple \vec{C} implique que le centre de gravité et le centre de carène soient sur la même verticale. L'équilibre est stable si le centre de carène est au dessus du centre de gravité; instable dans le cas contraire.

Cas où il y a une autre action extérieure

C'est par exemple le cas de la figure A.4.

La différence avec le cas précédent est que le déplacement n'est plus égal à la masse propre. En conséquence il peut y avoir équilibre instable même si le centre de carène est au dessus du

1. noté B , suivant la terminologie anglo-saxonne (pour *center of buoyancy*).

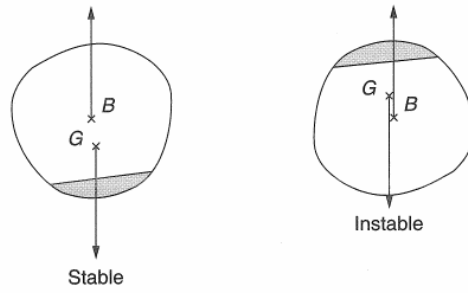


FIG. A.3 –

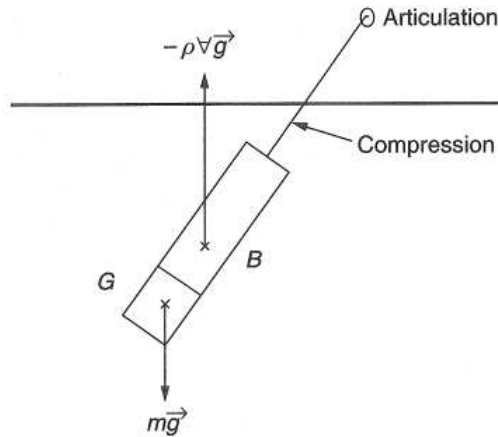


FIG. A.4 –

centre de gravité (cf l'expérience simple où l'on essaye d'enfoncer verticalement dans l'eau une bouteille partiellement remplie). Inversement il peut y avoir stabilité si le centre de carène est en dessous du centre de gravité (une colonne oscillante en excès de flottabilité).

A.2 Corps perçant la surface libre

La différence avec le cas précédent est que la surface S_C sur laquelle s'applique la pression hydrostatique n'est plus fermée.

Dans un premier temps, on se convainc que la pression atmosphérique p_0 n'intervient pas. Elle s'applique en effet aussi bien sur les parties aériennes que mouillées; on peut lui appliquer la formule du gradient et en conclure que la résultante est nulle.

Il est donc équivalent de supposer que $p_0 \equiv 0$ et que la pression hydrostatique se réduit à $-\rho g z$. On peut alors «fermer» la surface S_C par la **surface de flottaison** S_F , partie du plan $z = 0$ intérieure à la carène. Sur cette surface la pression hydrostatique est nulle. On a donc :

$$\iint_{S_C} z \vec{n} \, dS = \iint_{S_C \cup S_F} z \vec{n} \, dS = \iiint_V \vec{k} \, dV$$

$$\iint_{S_C} z \overrightarrow{GP} \wedge \vec{n} \, dS = \iint_{S_C \cup S_F} z \overrightarrow{GP} \wedge \vec{n} \, dS = - \iiint_V \text{Rot} \left\{ z \overrightarrow{GP} \right\} \, dV$$

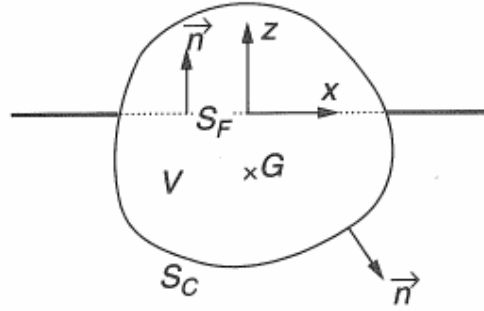


FIG. A.5 –

comme dans le cas du corps complètement immergé, et les résultats obtenus pour celui-ci restent valables : la poussée hydrostatique est verticale, de module égal au poids de l'eau déplacée et elle s'applique au centre de carène B .

Par rapport au cas précédent la différence est que, que l'on se place dans le référentiel fixe ou dans le référentiel lié, la géométrie de la partie immergée de la carène varie avec l'enfoncement et avec les rotations en gîte et en assiette. Pour chaque configuration il faut déterminer le volume immergé et son barycentre.

A.2.1 Courbes de stabilité

En pratique, le problème qui se pose habituellement est celui de la stabilité en gîte ou en assiette. On raisonne généralement à volume immergé constant et on détermine, pour des angles successifs d'inclinaison, le couple de redressement.

Pour chaque inclinaison α il faut donc déterminer d'abord le plan de flottaison (pour conserver le volume immergé), puis la nouvelle position $B(\alpha)$ du centre de carène et en déduire le couple de redressement. Il est habituellement exprimé sous la forme :

$$C(\alpha) = \rho g \forall GZ(\alpha) \quad (\text{A.10})$$

où $GZ(\alpha)$ est le bras de redressement.

Les règlements sur les structures en mer (navires, plates-formes offshore) imposent de calculer les couples de redressement en situation intacte et après avarie (certains compartiments étant envahis par l'eau), et de vérifier qu'ils permettent de conserver la stabilité sous l'effet d'actions extérieures comme des rafales de vent, ou le déplacement inopiné d'une partie du chargement.

Sur la figure A.7 on présente, en fonction de l'angle de gîte α , le couple de redressement correspondant à la carène de la figure précédente. Il est positif jusqu'à une inclinaison de l'ordre de 70 degrés. Sur la figure on a aussi représenté un couple inclinant, par exemple dû à l'action conjuguée du vent sur les parties aériennes et du rappel de l'ancrage. Les deux courbes se coupent en α_1 , position d'équilibre statique, et α_2 , limite du chavirement. Un critère d'équilibre statique semble donc être que α_1 soit bien inférieur à α_2 . Les règlements

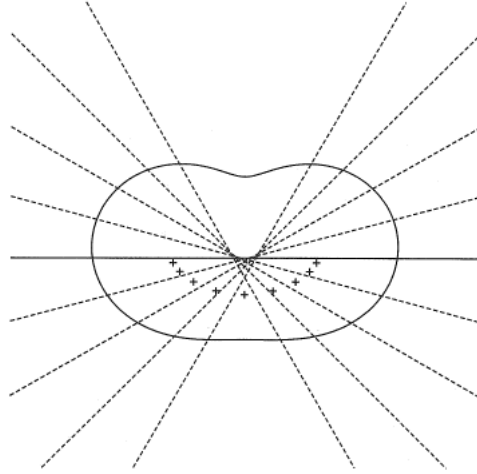


FIG. A.6 – Positions du plan de surface libre, et du centre de carène, pour des inclinaisons successives de -60 à $+60$ degrés.

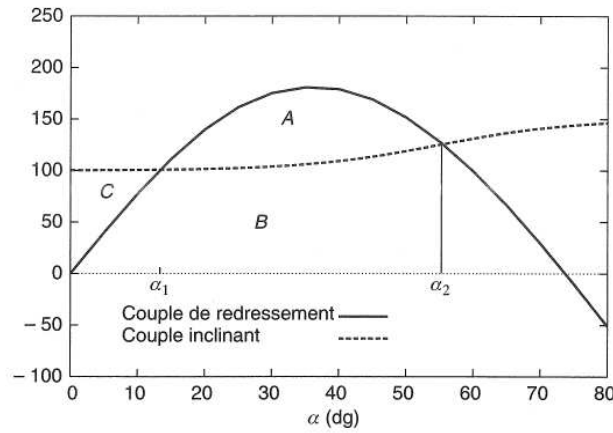


FIG. A.7 – Couple de redressement et couple inclinant dû au vent, en fonction de l'angle de gîte α .

imposent en général des critères de stabilité sous la forme :

$$(A + B) \geq k (B + C) \quad \text{avec } k > 1 \quad (\text{A.11})$$

où A , B et C correspondent aux portions d'aires sous les courbes des couples de renversement et de redressement, comme indiqué sur la figure A.7. L'interprétation physique est la suivante : soit une rafale de vent (en général de vitesse centennale) démarrant soudainement à $t = 0$. La structure va alors s'incliner jusqu'à un angle α_e tel que le travail produit par le moment de renversement ($B + C$) soit égal à l'énergie emmagasinée ($A + B$) par le couple de rappel hydrostatique (l'énergie cinétique étant nulle à l'inclinaison extrême). Cet angle α_e ne doit pas excéder le deuxième intercept α_2 des courbes de renversement et de redressement, faute de quoi la structure chavire. D'où l'application d'un coefficient de sécurité k au rapport des deux aires, typiquement pris égal à 1.3 ou 1.4.

A.2.2 Rappel hydrostatique linéarisé

On suppose ici que le déport de la carène, par rapport à une position de référence considérée comme sa position d'équilibre, est **petit** par rapport à ses dimensions propres. Sous cette hypothèse il est possible de linéariser le rappel hydrostatique et de l'exprimer à partir de certaines caractéristiques géométriques de la carène en sa position d'équilibre.

Cette restriction de petits mouvements ne concerne évidemment pas les composantes de translation horizontale, ou celle de rotation autour d'un axe vertical, qui n'entraînent aucune modification de la géométrie immergée. On suppose donc nuls, par simplification, les déports en cavalement, embardée et lacet du corps.

Les déports en pilonnement Δz_G (exprimé au centre de gravité), roulis α et tangage β sont eux supposés «petits». Il en résulte qu'on peut référencer les rotations à des axes fixes. Le mouvement d'un point lié au corps, de coordonnées X, Y, Z par rapport au centre de gravité, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta z_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

On utilise ici deux repères : un repère fixe (xyz) , centré à la surface libre, à la verticale du centre de gravité G , et un repère lié (XYZ) , centré en G , de directions parallèles à (xyz) avant les rotations.

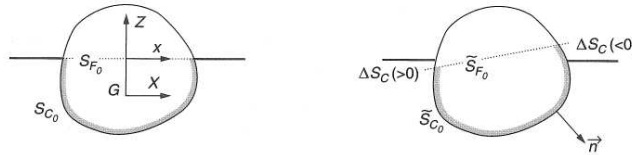


FIG. A.8 –

Soit S_C la partie mouillée de la carène, consécutivement au déport Δz_G du centre de gravité verticalement, et aux rotations α et β .

On peut décomposer algébriquement S_C de la manière suivante :

$$S_C = \tilde{S}_{C0} + \Delta S_C$$

où \tilde{S}_{C0} est la transformée de la surface mouillée au repos S_{C0} dans le mouvement de rotation, et ΔS_C la partie résiduelle au voisinage du plan $z = 0$ (figure A.8).

On considère d'abord l'effort en translation qui s'écrit :

$$\vec{F} = \rho g \iint_{S_C} z \vec{n} dS = \rho g \iint_{\tilde{S}_{C0}} z \vec{n} dS + \iint_{\Delta S_C} z \vec{n} dS$$

La composante sur ΔS_C est négligeable dans cadre d'une théorie linéarisée car d'ordre 2 par rapport au mouvement. La première composante se transforme en :

$$\begin{aligned} \rho g \iint_{\tilde{S}_{C0}} z \vec{n} dS &= \rho g \iint_{\tilde{S}_{C0} \cup \tilde{S}_{F0}} z \vec{n} dS - \rho g \iint_{\tilde{S}_{F0}} z \vec{n} dS \\ &= \rho g \forall_0 \vec{k} - \rho g \iint_{\tilde{S}_{F0}} z \vec{n} dS \end{aligned}$$

où \tilde{S}_{F_0} est la transformée, dans le mouvement de roto-translation, de la surface de flottaison au repos S_{F_0} . Sur \tilde{S}_{F_0} on a :

$$z = \Delta z_G + \alpha Y - \beta X \quad \vec{n} \simeq \vec{k}$$

On obtient donc un effort vertical donné par :

$$F_z = \rho g \forall_0 - \rho g \Delta z_G \iint_{S_{F_0}} dS - \rho g \alpha \iint_{S_{F_0}} Y dS + \rho g \beta \iint_{S_{F_0}} X dS$$

Le premier terme est la poussée hydrostatique en eau calme. La variation de poussée verticale prend la forme :

$$\Delta F_z = -K_{33} \Delta z_G - K_{34} \alpha - K_{35} \beta \quad (\text{A.13})$$

où les termes de raideur K_{33} , K_{34} , K_{35} sont donnés par :

$$K_{33} = \rho g \iint_{S_{F_0}} dS \quad (\text{A.14})$$

$$K_{34} = \rho g \iint_{S_{F_0}} Y dS \quad (\text{A.15})$$

$$K_{35} = -\rho g \iint_{S_{F_0}} X dS \quad (\text{A.16})$$

De façon analogue on transforme le couple \vec{C} en :

$$\vec{C} = -\rho g \iiint_{\tilde{V}_0} \text{Rot} \left\{ z \overrightarrow{GP} \right\} dV - \rho g \iint_{\tilde{S}_{F_0}} z \overrightarrow{GP} \wedge \vec{n} dS + \rho g \iint_{\Delta S_C} z \overrightarrow{GP} \wedge \vec{n} dS$$

la dernière contribution étant à nouveau négligeable dans le cadre d'une théorie linéarisée.

La première contribution se transforme en :

$$\vec{C}_1 = -\rho g \iiint_{\tilde{V}_0} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} dV = -\rho g \iiint_{V_0} \begin{pmatrix} \alpha Z - Y \\ \beta Z + X \\ 0 \end{pmatrix} dV$$

Si le centre de poussée est initialement à la verticale du centre de gravité, on a :

$$\iiint_{V_0} X dV = \iiint_{V_0} Y dV \equiv 0$$

Si ce n'est pas le cas, on a un couple initial, indépendant du déport Δz_G , α , β (éventuellement compensé par une action extérieure), qui ne nous intéresse pas ici. Ne retenant que les termes fonctions de α et β on obtient pour \vec{C}_1 :

$$\vec{C}_1 = -\rho g \forall_0 \overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La deuxième contribution dans l'expression de \vec{C} prend la forme :

$$\vec{C}_2 = -\rho g \iint_{S_{F0}} (\Delta z_G + \alpha Y - \beta X) \begin{pmatrix} Y \\ -X \\ 0 \end{pmatrix} dS$$

et s'exprime en fonction des raideurs K_{34} et K_{35} prédéfinies, et des inerties I_{XX} , I_{YY} , I_{XY} de la surface de flottaison :

$$I_{XX} = \iint_{S_{F0}} X^2 dS \quad I_{YY} = \iint_{S_{F0}} Y^2 dS \quad (\text{A.17})$$

$$I_{XY} = - \iint_{S_{F0}} X Y dS \quad (\text{A.18})$$

On a alors :

$$\vec{C}_2 = - \begin{pmatrix} K_{34} \Delta z_G + \rho g I_{YY} \alpha + \rho g I_{XY} \beta \\ K_{35} \Delta z_G + \rho g I_{XX} \beta + \rho g I_{XY} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le couple total prend donc la forme :

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 = - \begin{pmatrix} K_{34} \\ K_{35} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta z_G - \begin{pmatrix} \rho g (\forall_0 \overline{GB} + I_{YY}) \alpha \\ \rho g (\forall_0 \overline{GB} + I_{XX}) \beta \\ 0 \end{pmatrix} - \rho g I_{XY} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Pour des carènes dont la surface de flottaison possède au moins un axe de symétrie, l'inertie croisée I_{XY} est nulle.

La différence avec le cas du corps complètement immergé est donc l'apparition des termes de flottaison, qui expriment le déplacement du centre de poussée, dans le repère lié au corps.

On note habituellement :

$$\forall_0 \overline{GB} + I_{YY} = \forall_0 (\overline{GB} + \overline{BM}_\alpha) = \forall_0 \overline{GM}_\alpha \quad (\text{A.20})$$

$$\forall_0 \overline{GB} + I_{XX} = \forall_0 (\overline{GB} + \overline{BM}_\beta) = \forall_0 \overline{GM}_\beta \quad (\text{A.21})$$

M_α et M_β sont les **métacentres** en roulis et tangage.

Géométriquement M_α (respectivement M_β) correspond au centre de courbure de la courbe parcourue par le centre de poussée lorsqu'on incline la carène en roulis (respectivement en tangage) (figure A.9). Pour cette raison BM_α et BM_β sont appelés **rayons métacentriques** et sont aussi souvent notés ρ_α et ρ_β . \overline{GM}_α et \overline{GM}_β , dont le signe conditionne la stabilité, sont les **hauteurs métacentriques**, aussi souvent notées h_α et h_β . Si a est la distance algébrique $\overline{BG} = -\overline{GB}$, on a :

$$h_\alpha = \rho_\alpha - a \quad h_\beta = \rho_\beta - a$$

La différence avec le cas du corps immergé est qu'on peut avoir stabilité, même si le centre de carène est en dessous du centre de gravité, du moment que les hauteurs métacentriques sont positives.

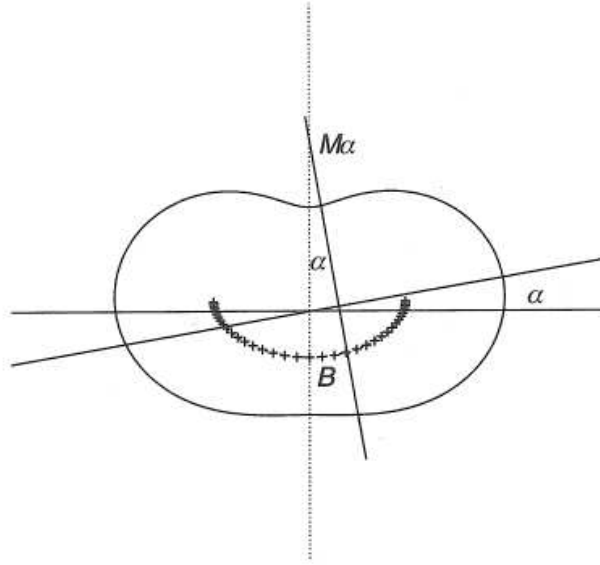


FIG. A.9 –

Si on rapproche ces résultats de l'expression générale du couple de redressement (A.10) pour un angle α quelconque, on déduit :

$$GM_\alpha = \left. \frac{d}{d\alpha} (GZ) \right|_{\alpha=0} \quad (\text{A.22})$$

Pour la carène considérée figures A.6 et A.7 on constate que le rappel linéarisé fournit une bonne approximation du couple de redressement jusqu'à des inclinaisons de l'ordre de 20 degrés.

Matrice des raideurs hydrostatiques

On définit habituellement la matrice des raideurs hydrostatiques \mathbf{K}_H :

$$\mathbf{K}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{35} & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & K_{44} & K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & K_{35} & K_{45} & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

telle que :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = -\mathbf{K}_H \begin{pmatrix} \Delta x_G \\ \Delta y_G \\ \Delta z_G \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

où $(\Delta x_G, \Delta y_G, \Delta z_G)$ représente le mouvement de translation du centre de gravité et (α, β, γ) les rotations en roulis, tangage, lacet.

K_{33} , K_{34} , K_{35} sont donnés par les expressions (A.14) à (A.16), et :

$$K_{44} = \rho g \forall_0 \overline{GM}_\alpha \quad K_{55} = \rho g \forall_0 \overline{GM}_\beta \quad K_{45} = \rho g I_{XY} \quad (\text{A.25})$$

Assiette induite par un couple extérieur

On a obtenu ci-dessus le torseur des efforts hydrostatiques associés à un déplacement $(\Delta z_G, \alpha, \beta)$ de la structure.

Inversement on peut se donner le torseur des efforts extérieurs et rechercher le déport induit.

On considère par exemple un couple imposé en assiette, soit C_y . Le déplacement associé $(\Delta z_G, \alpha, \beta)$ du corps vérifie :

$$\begin{aligned} K_{33} \Delta z_G + K_{34} \alpha + K_{35} \beta &= 0 \\ K_{34} \Delta z_G + K_{44} \alpha + K_{45} \beta &= 0 \\ K_{35} \Delta z_G + K_{45} \alpha + K_{55} \beta &= -C_y \end{aligned}$$

soit, si K_{34} et K_{45} sont nuls (cas de la symétrie babord-tribord) :

$$\begin{aligned} K_{33} \Delta z_G + K_{35} \beta &= 0 \\ K_{35} \Delta z_G + K_{55} \beta &= -C_y \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'angle d'inclinaison :

$$\beta = -\frac{K_{33}}{K_{33} K_{55} - K_{35}^2} C_y \quad (\text{A.26})$$

et le déplacement vertical du centre de gravité :

$$\Delta z_G = \frac{K_{35}}{K_{33} K_{55} - K_{35}^2} C_y \quad (\text{A.27})$$

On en déduit que ce n'est pas exactement (le signe de) K_{55} qui conditionne la stabilité mais (celui de) $K_{55} - K_{35}^2/K_{33}$. En pratique ce n'est guère que pour les navires, qui présentent une asymétrie avant-arrière, que K_{35} est non nul, mais K_{55} est alors très grand (sinon la stabilité en roulis est douteuse), donc la correction de raideur est minime.

Centre de flottaison

Toujours sur ce même cas de couple imposé en tangage, on a vu que le mouvement vertical du centre de gravité est donné par :

$$\Delta z_G = -\frac{K_{35}}{K_{33}} \beta$$

Le mouvement vertical d'un point d'abscisse X par rapport à G est alors :

$$\Delta z = \Delta z_G - \beta X = -\left(\frac{K_{35}}{K_{33}} + X\right) \beta$$

Il est nul pour

$$X_F = -\frac{K_{35}}{K_{33}} = \frac{\iint_{S_{F0}} X \, dS}{\iint_{S_{F0}} dS} \quad (\text{A.28})$$

De même, considérant une rotation en roulis, on obtient un mouvement vertical nul pour

$$Y_F = \frac{K_{34}}{K_{33}} = \frac{\iint_{S_{F0}} Y \, dS}{\iint_{S_{F0}} dS} \quad (\text{A.29})$$

Le point F de coordonnées (X_F, Y_F) est appelé **centre de flottaison**. C'est le point qui reste immobile lorsque la structure s'incline en gîte et en assiette sous l'effet de couples extérieurs (l'effort imposé verticalement restant nul).

Carènes liquides

On entend par carènes liquides des volumes fluides confinés dans des réservoirs à l'intérieur de la structure, avec interfaces fluide-air (ou fluide-fluide). Le déplacement des fluides contenus avec le mouvement de roulis-tangage peut entraîner des modifications appréciables du rappel hydrostatique.

Dans le cadre d'une théorie linéarisée il est aisé d'en tenir compte en calculant le déplacement horizontal du centre de gravité de l'ensemble structure + carènes liquides. Il s'exprime par :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_G \\ \Delta y_G \end{pmatrix} = -\sum_n \frac{\rho_n}{m} \begin{pmatrix} I_{YYn} & I_{XYn} \\ I_{XYn} & I_{XXn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

où ρ_n est la masse volumique du fluide contenu dans le réservoir n et où I_{XXn} , I_{XYn} et I_{YYn} sont les inerties des surfaces libres de chaque carène par rapport à son centre de rotation.

On en déduit les valeurs corrigées des raideurs hydrostatiques :

$$K'_{44} = K_{44} - \sum_n \rho_n g I_{YYn} \quad (\text{A.30})$$

$$K'_{55} = K_{55} - \sum_n \rho_n g I_{XXn} \quad (\text{A.31})$$

$$K'_{45} = K_{45} - \sum_n \rho_n g I_{XYn} \quad (\text{A.32})$$

Un moyen efficace de réduire l'effet des carènes liquides est de partitionner les réservoirs (figure A.10).

A noter que les carènes liquides ont aussi des effets «dynamiques», qui se traduisent, sur les équations du mouvement de la structure, par des masses et inerties ajoutées additionnelles (positives ou négatives, suivant le déphasage du mouvement de la carène liquide), et éventuellement par un amortissement complémentaire lié aux pertes de charge (voir le paragraphe 5.3.5). Ces effets sont souvent préjudiciables, mais ils peuvent aussi être mis à profit par exemple pour diminuer le roulis des navires à la résonance (citernes anti-roulis).

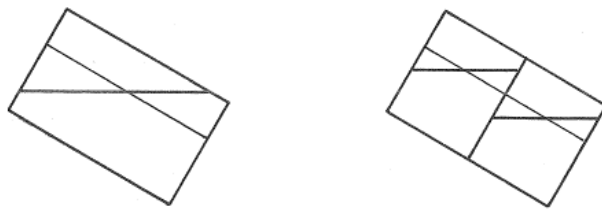


FIG. A.10 –

Annexe B

SYSTEME MASSE RESSORT AMORTI

On effectue ici quelques rappels sur les caractéristiques de la réponse d'un système dynamique régi par l'équation :

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + B \frac{dX}{dt} + K X = F(t) \quad (\text{B.1})$$

X étant le degré de liberté considéré, M la masse apparente (masse plus masse ajoutée), K la raideur, B l'amortissement et $F(t)$ l'effort exciteur.

B.1 Cas sans excitation

Soit donc à résoudre :

$$M \ddot{X} + B \dot{X} + K X = 0 \quad (\text{B.2})$$

avec, par exemple, les conditions initiales $X(0) = X_0$, $\dot{X}(0) = 0$.

On recherche la solution sous la forme $X(t) = A \exp(\lambda t)$, ce qui donne pour λ l'équation du second degré :

$$M \lambda^2 + B \lambda + K = 0$$

de solutions

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4KM}}{2M}$$

Le discriminant s'annule pour $B = B_C = 2\sqrt{KM}$. B_C est appelé **amortissement critique**.

Lorsque B est supérieur à B_C les deux racines sont réelles et négatives. Le système revient à sa position d'équilibre sans oscillation.

Lorsque B est inférieur à B_C les deux racines sont

$$\lambda = -\frac{B}{2M} \pm i \frac{\sqrt{4KM - B^2}}{2M}$$

et le mouvement consécutif à un départ initial égal à X_0 et une vitesse initiale nulle s'écrit :

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{Bt}{2M}} \left[\cos \omega_0 t + \frac{B}{2M\omega_0} \sin \omega_0 t \right] \quad (\text{B.3})$$

où $\omega_0 = \sqrt{4KM - B^2}/(2M)$ est la **pulsation propre**.

Le mouvement consiste en une sinusoïde dont l'amplitude décroît de façon exponentielle.

Si le **taux d'amortissement** $\zeta = B/B_C$ est petit devant un, la pulsation propre ω_0 est bien approchée par $\sqrt{K/M}$. La réponse consécutive à un départ initial s'écrit alors :

$$X(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_0 t} [\cos \omega_0 t + \zeta \sin \omega_0 t] \quad (\text{B.4})$$

Pour un taux d'amortissement de 1 % le facteur d'amortissement $\exp(-2\pi\zeta)$, d'un cycle au suivant, est égal à 0,94. Avec 5 % d'amortissement il est de 0,73. Avec 10 % il est de 0,53.

Les taux d'amortissement que l'on rencontre dans la réponse à la houle des structures offshore vont typiquement de moins de 5 à 20 %.

B.2 Réponse sous excitation harmonique

Soit à résoudre :

$$M \ddot{X} + B \dot{X} + K X = F_0 \cos \omega t \quad (\text{B.5})$$

Recherchant $X(t)$ sous la forme :

$$X(t) = \Re \{ X_0 e^{-i\omega t} \}$$

on obtient :

$$X_0 = \frac{F_0}{-M\omega^2 + K - iB\omega} \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{F_0}{K \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2i\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right]} \quad (\text{B.7})$$

Le module de la fonction complexe $[1 - x^2 - 2i\zeta x]^{-1}$ est tracé sur la figure B.1, pour trois valeurs du taux d'amortissement : $\zeta = 5, 10$ et 20 %.

On peut distinguer trois situations asymptotiques :

B.2.1 $\omega \ll \omega_0$ (système raide) :

On a alors :

$$X_0 \simeq \frac{F_0}{K} \quad (\text{B.8})$$

Seule la raideur du système intervient.

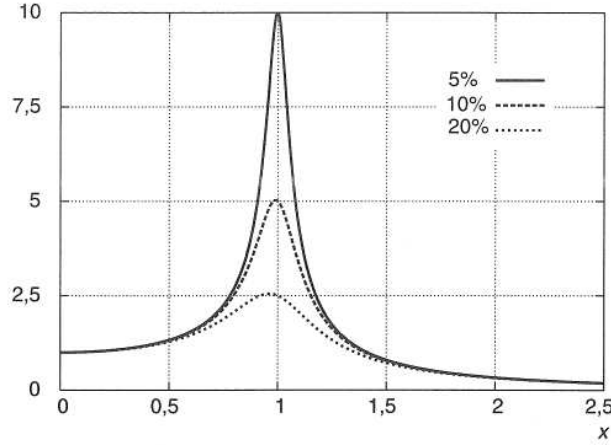


FIG. B.1 – Module de $[1 - x^2 - 2i\zeta x]^{-1}$ pour $\zeta = 5, 10$ et 20% .

B.2.2 $\omega \gg \omega_0$ (réponse inertielle) :

On obtient :

$$X_0 \simeq -\frac{F_0}{M\omega^2} \quad (\text{B.9})$$

L'amplitude de la réponse ne dépend que de la masse et de la pulsation d'excitation.

B.2.3 $\omega \simeq \omega_0$ (résonance) :

En ce cas :

$$X_0 \simeq i \frac{F_0}{B\omega_0} \simeq \frac{i}{2\zeta} \frac{F_0}{K} \quad (\text{B.10})$$

L'amplitude de la réponse est inversement proportionnelle à l'amortissement B du système.

Le rapport $1/(2\zeta)$ est le **facteur d'amplification** par rapport à la réponse statique F_0/K .

B.3 Réponse à une excitation aléatoire

Soit $S_F(\omega)$ la densité spectrale d'énergie de l'excitation.

La fonction de transfert étant donnée par (B.6), la densité spectrale de la réponse se relie à celle de l'excitation par :

$$S_X(\omega) = \frac{S_F(\omega)}{(-M\omega^2 + K)^2 + B^2\omega^2} \quad (\text{B.11})$$

La variance de la réponse s'obtient par :

$$\sigma_X^2 = \int_0^\infty \frac{S_F(\omega) d\omega}{(-M\omega^2 + K)^2 + B^2\omega^2} \quad (\text{B.12})$$

Pour un système très peu amorti la réponse se trouve concentrée dans un petit voisinage autour de la pulsation propre (sous condition évidemment qu'il y ait une excitation

significative à cette pulsation). On peut alors obtenir une valeur approchée de la variance par :

$$\sigma_X^2 \simeq S_F(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(-M\omega^2 + K)^2 + B^2\omega^2} \quad (\text{B.13})$$

Le calcul de l'intégrale peut se faire de différentes manières, par exemple par la méthode des résidus.

On obtient ainsi la variance sous la forme :

$$\sigma_X^2 \simeq \frac{\pi S_F(\omega_0)}{2 B K} \quad (\text{B.14})$$

L'écart type de la réponse σ_X est inversement proportionnel à la **racine carrée** du taux d'amortissement.

Annexe C

NOMENCLATURE

A	amplitude
\vec{A}	mouvement angulaire
b	largeur
B	amortissement, centre de carène, largeur
b_d	amortissement de dérive normalisé
B_d	amortissement de dérive
b_n	moment centré
c	largeur mouillée
\vec{C}	moment
C_a	coefficient d'amortissement
C_D	coefficient de traînée
C_f	coefficient de frottement
C_G	vitesse de groupe
C_m	coefficient de masse ajoutée
C_M	coefficient d'inertie: $C_M = 1 + C_m$
C_P	vitesse de phase
d	distance, tirant d'eau
D	diamètre
e	échelle
E	enveloppe réelle ou complexe, énergie
E	espérance, valeur moyenne
f	fréquence
\tilde{f}	fréquence adimensionnelle
f^*	fréquence adimensionnelle
\vec{f}	effort complexe
\vec{f}_d	effort de dérive normalisé
\vec{F}	effort
\vec{F}_d	effort de dérive
F_n	nombre de Froude

g	gravité
G	centre de gravité
h	profondeur d'eau
H	crête à creux, fonction de Kochin
H_m	fonction de Hankel
H_S	hauteur significative
I	inertie
J_m	fonction de Bessel de première espèce
k	nombre d'onde
K	raideur
K_C	nombre de Keulegan & Carpenter
K_m	fonction de Bessel modifiée
K_S	paramètre de stabilité
l, L	longueur, longueur d'onde
m, M	masse
m_a, M_a	masse ajoutée
m_n	moment du spectre
M_α, M_β	métacentres
\vec{n}	vecteur normal
p	densité de probabilité, pression
P	fonction de répartition, point courant sur la carène
Q	débit
r	rapport de vitesse
R	fonction d'auto-corrélation, distance radiale
Re, re	nombres de Reynolds
Re_o, re_o	nombres de Reynolds «oscillants»
R_0	rayon du cylindre, rayon de courbure
s	abscisse curviligne
S	densité spectrale, surface
S_C	carène
S_F	surface de flottaison
S_L	surface libre
S_t	nombre de Strouhal
T	période
T_m, T_1	période moyenne : $T_m = 2\pi m_0/m_1$
T_Z, T_2	période moyenne up-crossing : $T_Z = 2\pi \sqrt{m_0/m_2}$
T_P	période de pic

U	vitesse
U_C	vitesse du courant
U_r	nombre d'Ursell
U_R	vitesse réduite
U_0	vitesse du courant
\vec{U}	vitesse solide
u, v, w	composantes de la vitesse fluide
V	vitesse, volume
\vec{V}	vitesse fluide
v_*	vitesse de frottement
Y_m	fonction de Bessel de deuxième espèce
z_0	hauteur de rugosité
α	rotation par rapport à x (roulis, gîte)
β	rotation par rapport à y (tangage, assiette), incidence de houle, paramètre de Stokes, angle du dièdre
γ	rotation par rapport à z (lacet), constante d'Euler
Γ	ligne de flottaison
δ	épaisseur de couche limite, de jet
Δ	Laplacien, paramètre de stretching
ϵ	paramètre d'étroitesse
ε	petit paramètre assimilé à la cambrure
ζ	hauteur adimensionnelle $H/\sqrt{m_0}$, taux d'amortissement, mouvement vertical à la flottaison
η	élévation de surface libre
θ	angle polaire, déphasage
λ	nombre d'onde
μ	coefficient de perte de charge
ν	viscosité cinématique
ρ	masse volumique
σ	écart type
τ	période sans dimension T/T_m , nombre de Brard, porosité
φ	potentiel complexe
Φ	potentiel réel
Ψ	fonction de courant
ψ	cap
ω, Ω	pulsation
ω_e	pulsation de rencontre ou d'équilibrage
∇	gradient
∇_0	gradient horizontal
\forall	déplacement volumique