

École Centrale de Marseille  
ECM

**Hydrodynamique Marine**  
Première partie : introduction à l'hydrodynamique



**Bernard MOLIN**

O.G.D. : Mécanique  
P.G.D. : Génie Mer

3ème année  
2006/2007

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les équations de Navier-Stokes</b>	<b>1</b>
1.1	Description eulérienne de l'écoulement . . . . .	1
1.2	Dérivation des intégrales volumiques . . . . .	2
1.3	Application : conservation de la masse . . . . .	4
1.4	Le tenseur des contraintes . . . . .	4
1.5	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	5
1.6	Conditions aux limites . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Écoulements de fluides visqueux</b>	<b>8</b>
2.1	Écoulement entre deux plans . . . . .	8
2.2	Écoulement sur un plan incliné . . . . .	9
2.3	Écoulements de Hele-Shaw . . . . .	10
2.4	Écoulement dans un tuyau (Poiseuille) . . . . .	11
2.5	Plaque plane en mouvement sinusoïdal . . . . .	13
2.6	Plaque plane en mouvement impulsif . . . . .	15
2.7	Écoulement sur une plaque plane semi-infinie . . . . .	17
2.8	Les épaisseurs de couche limite . . . . .	21
2.9	Couche limite sur un profil . . . . .	22
2.9.1	L'équation de von Karman . . . . .	25
2.9.2	Méthode approchée de résolution des équations de couche limite . . . . .	26
2.10	Couches limites turbulentes . . . . .	28
2.10.1	Les équations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	29
2.10.2	Couche limite turbulente sur une plaque plane . . . . .	33
2.10.3	Application à la résistance à l'avancement des carènes . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Écoulements irrotationnels de fluides parfaits. Généralités</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Les équations d'Euler . . . . .	40
3.3	Le potentiel des vitesses . . . . .	42
3.4	Exemples de résolution du problème aux limites . . . . .	43
3.4.1	Cylindre circulaire dans un courant . . . . .	44
3.4.2	Génération de la houle par un batteur plan . . . . .	47
3.4.3	Implosion d'une cavité sphérique (équation de Rayleigh-Plesset) . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Écoulements irrotationnels de fluides parfaits. Écoulements plans</b>	<b>55</b>
4.1	La fonction de courant . . . . .	55
4.2	Le potentiel complexe . . . . .	56
4.3	Rappels sur les fonctions holomorphes de variable complexe . . . . .	61
4.3.1	Théorème de Cauchy . . . . .	62
4.3.2	Corollaires . . . . .	62
4.3.3	Développement en série de Laurent . . . . .	63
4.3.4	Théorème des résidus . . . . .	64
4.4	Théorème du cercle . . . . .	64
4.5	Théorèmes de Blasius . . . . .	65
4.5.1	Terme instationnaire . . . . .	66
4.5.2	Terme quadratique . . . . .	66
4.5.3	Cylindre placé dans un courant . . . . .	67
4.5.4	Cylindre sous houle . . . . .	67
4.6	Transformations conformes . . . . .	69
4.6.1	Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	70
4.6.2	Applications . . . . .	71
4.7	Écoulements autour de profils . . . . .	74
4.7.1	Efforts sur le profil . . . . .	75
4.7.2	Exemple de transformation . . . . .	76
4.7.3	Profils de Joukowski . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Solide indéformable en mouvement dans un fluide illimité</b>	<b>80</b>
5.1	Efforts hydrodynamiques . . . . .	80
5.2	La matrice de masses et inerties ajoutées . . . . .	83
5.3	Application au cas d'un mouvement plan . . . . .	87
5.4	Solide en évolution près d'une paroi . . . . .	88
5.5	Masses ajoutées de formes simples . . . . .	89
5.5.1	Cylindre circulaire . . . . .	89
5.5.2	Plaque plane . . . . .	90
5.5.3	Ellipse . . . . .	91
5.5.4	Rectangle . . . . .	91
5.5.5	Sphère . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Théorie linéarisée des profils portants minces</b>	<b>93</b>
6.1	Introduction . . . . .	93
6.2	Position du problème . . . . .	93
6.3	Résolution du problème impair . . . . .	97
6.4	Applications . . . . .	100
6.4.1	Plaque plane . . . . .	100
6.4.2	Efficacité d'un volet au bord de fuite . . . . .	101
6.4.3	Angle de portance nulle . . . . .	102
6.4.4	Angle d'incidence idéal . . . . .	103
6.4.5	Profils NACA (série a) . . . . .	104
6.5	Résolution simultanée des problèmes d'épaisseur et de portance . . . . .	105

<b>A</b>	<b>Formulaire mathématique</b>	<b>108</b>
A.1	Rappel des formules de l'analyse vectorielle . . . . .	108
A.1.1	Produit scalaire . . . . .	108
A.1.2	Produit vectoriel . . . . .	108
A.1.3	Produit mixte . . . . .	108
A.1.4	Gradient . . . . .	108
A.1.5	Divergence . . . . .	109
A.1.6	Rotationnel . . . . .	109
A.1.7	Laplacien . . . . .	109
A.2	Formules de transformation des intégrales vectorielles . . . . .	110
A.2.1	Transformation des intégrales de surface en intégrales de volume . . . .	110
A.2.2	Transformation des intégrales curvilignes en intégrales de surface . . . .	110

# Introduction

Destiné aux élèves de Centrale Marseille ayant choisi de se spécialiser en Génie Mer, ce cours permet un approfondissement de leurs connaissances dans le domaine de la Mécanique des Fluides Incompressibles.

Sa rédaction s'est fortement inspirée de celle des cours dispensés à l'UC Berkeley par le Professeur Wehausen. Elle est aussi très voisine de celle des chapitres 3, 4 et 5 de l'excellent livre du Professeur Newman (*Marine Hydrodynamics*, MIT Press), disponible à la bibliothèque de l'IMT.

Les illustrations ont été en partie empruntées à ces deux ouvrages, et aussi à *An Album of Fluid Motion*, de van Dyke, à *Fluid Mechanics*, de Kundu, et à *Boundary Layer Theory*, de Schlichting.

## Notations

### Dérivées partielles

Les dérivées partielles sont indifféremment notées  $\partial f / \partial x$ , ou  $f_x$ , la seconde notation étant utilisée de manière préférentielle quand il n'y a pas d'ambiguïté.

### Gradient, divergence, rotationnel et laplacien

Le signe  $\nabla$  est réservé à l'opérateur **gradient**.

**Divergence** est notée **div**.

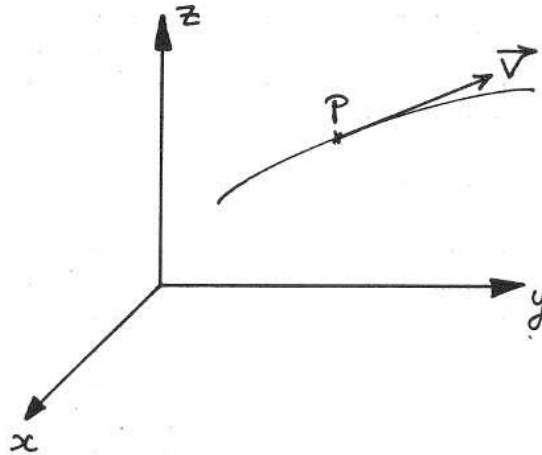
**Rotationnel** est noté **Rot**.

**Laplacien** est noté  $\Delta$ .

# Chapitre 1

## Les équations de Navier-Stokes

### 1.1 Description eulérienne de l'écoulement



On introduit un référentiel galiléen  $xyz$ . L'axe  $z$  est vertical ascendant.

Soit  $X(t), Y(t), Z(t)$  la trajectoire d'une "particule" fluide, qui à l'instant  $t$  se trouve au point  $x = X(t), y = Y(t), z = Z(t)$ . Soit  $\vec{V} = (u, v, w) = (dX/dt, dY/dt, dZ/dt)$  sa vitesse.

Soit  $f$  une grandeur scalaire attachée à la particule (par exemple sa masse volumique ou sa température). En description eulérienne on note  $f(x, y, z, t)$  la valeur de  $f$  attachée à la particule qui se trouve en  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  :

$$f(x, y, z, t) = f(X(t), Y(t), Z(t), t)$$

#### Dérivation

On souhaite exprimer la variation en temps de la grandeur  $f$  attachée à la particule fluide. On parle alors de dérivée lagrangienne :

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} [f(X(t), Y(t), Z(t), t)]$$

Il vient alors :

$$\frac{df}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.1)$$

ou, en notation plus compacte :

$$\frac{df}{dt} = \vec{V} \cdot \nabla f + f_t \quad (1.1)$$

## Exemples

- Masse volumique  $\rho$

$$\frac{d\rho}{dt} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho_t \quad (1.2)$$

- Composantes de la vitesse

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = \vec{V} \cdot \nabla u + u_t$$

$$\frac{dv}{dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = \vec{V} \cdot \nabla v + v_t$$

$$\frac{dw}{dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = \vec{V} \cdot \nabla w + w_t$$

Soit, pour l'accélération  $d\vec{V}/dt$  :

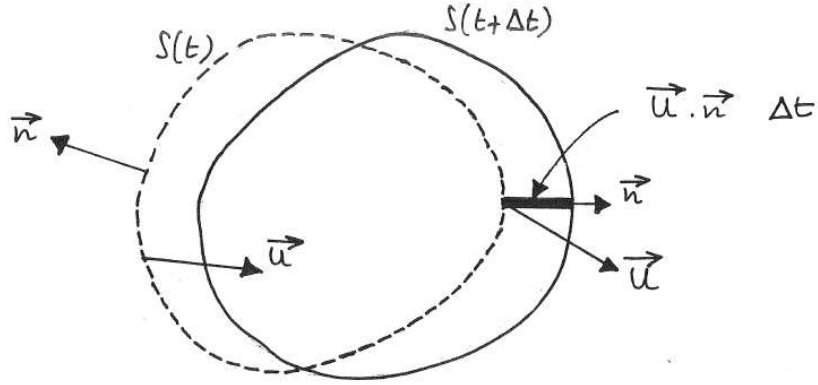
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{V}_t \quad (1.3)$$

## 1.2 Dérivation des intégrales volumiques

Soit l'intégrale

$$I(t) = \iiint_{\Omega(t)} f(x,y,z,t) d\Omega$$

où  $\Omega(t)$  est un domaine (non nécessairement formé toujours des mêmes particules) limité par une surface fermée  $S(t)$ , animée localement d'une vitesse  $\vec{U}(x,y,z,t)$ .  $\vec{n}(t)$  est la normale extérieure à  $\Omega(t)$ .



L'accroissement  $\Delta I$  de  $I(t)$  sur un petit intervalle de temps  $\Delta t$  est donné par :

$$\begin{aligned}
 \Delta I &= I(t + \Delta t) - I(t) \\
 &= \iiint_{\Omega(t+\Delta t)} f(x,y,z,t + \Delta t) d\Omega - \iiint_{\Omega(t)} f(x,y,z,t) d\Omega \\
 &= \iiint_{\Omega(t)} (f(x,y,z,t + \Delta t) - f(x,y,z,t)) d\Omega + \iiint_{\Delta\Omega(t)} f(x,y,z,t) d\Omega + O(\Delta t^2)
 \end{aligned}$$

La variation de volume  $\Delta\Omega$  est liée au mouvement de la frontière  $S$ . Localement cette variation est égale à  $dS \vec{U} \cdot \vec{n} \Delta t$ . On obtient donc :

$$\Delta I = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega \Delta t + \iint_{S(t)} f \vec{U} \cdot \vec{n} dS \Delta t + O(\Delta t^2)$$

En passant à la limite pour  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient la dérivée de  $I(t)$  :

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \iint_{S(t)} f \vec{U} \cdot \vec{n} dS \quad (1.4)$$

### Cas particulier où $\Omega$ est un volume fluide

On entend par là un volume constitué toujours des mêmes particules fluides. En ce cas la vitesse  $\vec{U}$  de la frontière  $S$  du domaine fluide est égale à la vitesse  $\vec{V}$  des particules fluides. On a alors :

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \iint_{S(t)} f \vec{V} \cdot \vec{n} dS \quad (1.5)$$

que l'on peut transformer, en appliquant la formule d'Ostrogradsky, en :

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{V}) \right] d\Omega \quad (1.6)$$

### 1.3 Application : conservation de la masse

La masse d'un volume fluide quelconque  $\Omega(t)$  est donnée par :

$$m = \iiint_{\Omega(t)} \rho \, d\Omega$$

La conservation de la masse implique :

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] d\Omega = 0$$

Le volume de référence  $\Omega(t)$  étant arbitraire, l'intégrand doit être nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \tag{1.7}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

ou encore :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \tag{1.8}$$

Dans ce cours on se restreint à l'étude des fluides incompressibles, tels que  $d\rho/dt \equiv 0$ .

La conservation de la masse se traduit alors par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = u_x + v_y + w_z = 0 \tag{1.9}$$

### 1.4 Le tenseur des contraintes

Soit  $\Omega(t)$  un volume fluide de frontière  $S(t)$  et de normale extérieure  $\vec{n}$ . Par définition du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  les efforts appliqués à  $\Omega(t)$  sur un élément de surface  $dS$  sont donnés par :

$$d\vec{F} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} \, dS \tag{1.10}$$

Pour un fluide **newtonien et incompressible**, le tenseur des contraintes s'exprime à partir de la pression  $p$  et du gradient de vitesse de l'écoulement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{1}} + \mu \left( \nabla \vec{V} + {}^t \nabla \vec{V} \right)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2u_x & u_y + v_x & u_z + w_x \\ v_x + u_y & 2v_y & v_z + w_y \\ w_x + u_z & w_y + v_z & 2w_z \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

$\mu$  est la viscosité dynamique. On a  $\mu = \rho \nu$ , où  $\nu$  est la viscosité cinématique.

## 1.5 Conservation de la quantité de mouvement

Soit  $\vec{Q}(t)$  la quantité de mouvement d'un volume fluide (formé toujours des mêmes particules)  $\Omega(t)$  :

$$\vec{Q} = \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega$$

Par application du théorème fondamental de la dynamique, la dérivée temporelle de  $\vec{Q}$  est égale à la somme des forces extérieures agissant sur  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{Q} &= \iiint_{\Omega} \rho \vec{g} d\Omega + \iint_S \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} dS \\ \frac{d}{dt} \vec{Q} &= \iiint_{\Omega} (\rho \vec{g} + \text{div} \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $\vec{g}$  est l'accélération de la pesanteur.

L'application de la formule de dérivation des intégrales volumiques à  $\vec{Q}$  donne :

$$\frac{d}{dt} \vec{Q} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\Omega + \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

que l'on peut également transformer en intégrale de volume :

$$\frac{d}{dt} \vec{Q} = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) \right) d\Omega \quad (1.13)$$

Cette expression se transforme en :

$$\frac{d}{dt} \vec{Q} = \iiint_{\Omega} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\Omega \quad (1.14)$$

Pour démontrer ce résultat sans trop alourdir les écritures, on considère la composante suivant  $x$  des deux membres de l'équation (1.13) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \iiint_{\Omega} \rho u \, d\Omega \right] &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \vec{V}) \right) d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega} \left( \rho_t u + \rho u_t + \rho u \operatorname{div} \vec{V} + (\rho \nabla u + u \nabla \rho) \cdot \vec{V} \right) d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega} \left( \rho (u_t + \nabla u \cdot \vec{V}) + u (\rho_t + \rho \operatorname{div} \vec{V} + \nabla \rho \cdot \vec{V}) \right) d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega} \rho \frac{du}{dt} d\Omega
\end{aligned}$$

Le volume fluide  $\Omega$  étant arbitraire, on peut identifier les deux intégrants dans les deuxièmes membres de (1.12) et (1.14), ce qui donne :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} + \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.15)$$

ou :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \rho \vec{g} + \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.16)$$

Pour un fluide incompressible,  $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}$  se réduit à :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = -\nabla p + \mu \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

On obtient donc finalement :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \Delta \vec{V} \quad (1.18)$$

à laquelle il faut rajouter l'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (1.9)$$

ou, sous forme développée :

$$\begin{aligned}
u_t + u u_x + v u_y + w u_z &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\
v_t + u v_x + v v_y + w v_z &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) \\
w_t + u w_x + v w_y + w w_z &= -\frac{1}{\rho} p_z - g + \nu (w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) \\
u_x + v_y + w_z &= 0
\end{aligned}$$

soit 4 équations aux dérivées partielles pour 4 inconnues  $u, v, w$  et  $p$ : les équations dites de Navier-Stokes.

La présence des termes non-linéaires de convection ( $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ ) rend malheureusement la résolution de ces équations extrêmement difficile. Elle est également à l'origine d'un phénomène que l'on sait encore mal modéliser, la **turbulence**, qui apparaît dès qu'un nombre caractéristique de l'écoulement, le nombre de Reynolds, dépasse un certain seuil.

Comme on le verra au chapitre suivant, ce n'est que dans les cas où ces termes s'annulent identiquement, pour quelques géométries très particulières, que l'on peut exhiber des solutions analytiques.

## 1.6 Conditions aux limites

### • Frontières solides

On a alors une condition d'**adhérence**: la vitesse du fluide est localement égale à la vitesse de la paroi :

$$\vec{V} = \vec{U} \quad (1.19)$$

L'égalité des composantes tangentielles de la vitesse est rendue possible grâce à la viscosité et à l'existence d'une couche limite.

Dans le cas de fluides parfaits ( $\nu = 0$ ), il n'est plus possible d'assurer l'égalité des vitesses tangentielles. On écrit alors une condition de **glissement**, ou d'égalité des vitesses normales :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad (1.20)$$

### • Interface entre deux fluides

Aux conditions d'égalité des composantes de la vitesse, il convient d'ajouter des conditions d'égalité des contraintes, normales et tangentielles.

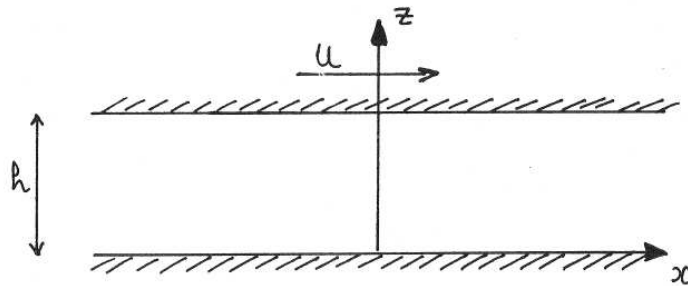
En fluide parfait, on écrit l'égalité des vitesses normales et des contraintes normales, qui se réduisent alors à la pression.

# Chapitre 2

## Écoulements de fluides visqueux

### 2.1 Écoulement entre deux plans

Il s'agit d'un écoulement confiné entre deux plans parallèles, d'écartement  $h$ . Le plan inférieur est immobile et le plan supérieur avance à la vitesse  $U$  dans la direction  $x$ .



On suppose nulle la composante  $v$  de la vitesse fluide dans la direction  $y$ . Les deux plans étant supposés infinis suivant  $x$ , on peut raisonnablement supposer que la composante  $u$  de la vitesse suivant  $x$  ne dépend que de  $z$ . La condition de continuité  $u_x + v_y + w_z = 0$  donne alors  $w_z = 0$  : la vitesse suivant  $z$  est constante, donc nulle, puisque  $w(0) = w(h) = 0$ .

Les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu u_{zz} \quad (2.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_y \quad 0 = -\frac{1}{\rho} p_z$$

Des deux dernières équations on tire que la pression est constante dans chaque tranche  $x = \text{cte}$ . De la première, comme  $u$  ne dépend que de  $z$ , et  $p$  que de  $x$ , on déduit que  $1/\rho p_x$  et  $\nu u_{zz}$  sont égaux à la même constante. Par intégration en  $z$  et satisfaction des conditions d'adhérence en  $x = 0$  et  $x = h$  on obtient le profil de vitesse :

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} p_x z(z-h) + \frac{U}{h} z \quad (2.2)$$

qui est donc parabolique. Quelques exemples de profil, en fonction du paramètre  $P = -(h^2/2\mu U) p_x$ , sont présentés sur la figure 2.1. Le cas où  $P = 0$  est connu sous le nom d'écoulement de Couette.

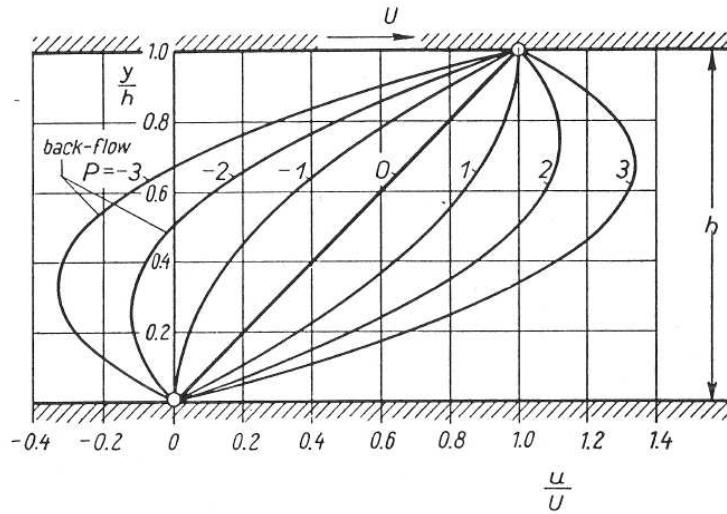
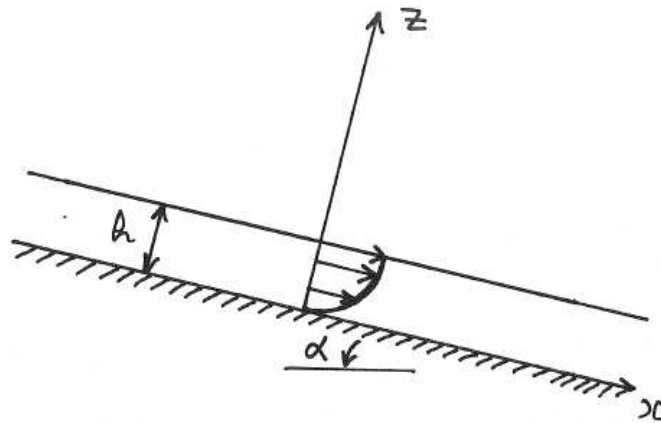


FIG. 2.1 – Profils d'écoulement.

## 2.2 Écoulement sur un plan incliné

On considère un film liquide d'épaisseur constante  $h$  s'écoulant sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On suppose que la pression extérieure est constante à la surface libre.



Les différences par rapport au cas précédent sont que la gravité (projetée suivant l'axe  $x$ ) remplace le gradient de pression, et que les contraintes sont nulles sur le plan supérieur (pas de cisaillement et pression égale à la pression atmosphérique)<sup>1</sup>.

1. En toute rigueur la condition d'adhérence à la surface libre entraîne que l'air est entraîné par le liquide, qu'il s'y développe une couche limite, donc un gradient de vitesse : la contrainte de cisaillement  $\rho \nu u_z(h)$  n'est pas strictement nulle.

Comme dans le problème précédent, l'hypothèse que la vitesse suivant  $x$  ne dépend pas de  $x$  entraîne, via la condition de continuité, que la vitesse suivant  $z$  est nulle.

Les projections suivant  $x$  et  $z$  des équations de Navier-Stokes donnent :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} p_x + g \sin \alpha + \nu u_{zz} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} p_z - g \cos \alpha \end{aligned}$$

L'intégration suivant  $z$  de la seconde équation donne :

$$p(x, z) = p_{\text{atm}} - \rho g \cos \alpha (z - h) = p(z)$$

la pression atmosphérique étant supposée constante, donc indépendante de  $x$ .

La première équation se réduit donc à :

$$0 = g \sin \alpha + \nu u_{zz} \quad (2.3)$$

Les conditions aux limites pour  $u(z)$  étant :

$u(0) = 0$  (adhérence) et

$u_z(h) = 0$  (pas de cisaillement à la surface libre).

On obtient :

$$u(z) = \frac{g}{\nu} \sin \alpha \left( h z - \frac{z^2}{2} \right) \quad (2.4)$$

La vitesse moyenne dans le film fluide est alors :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(z) dz = \frac{h^2 g \sin \alpha}{3 \nu}$$

Si l'on considère par exemple un film d'eau ruisselant sur une paroi verticale, d'épaisseur 1 mm, on obtient  $\bar{u} \simeq 3$  m/s (avec  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s).

## 2.3 Écoulements de Hele-Shaw

Comme celui étudié au paragraphe 2.1, il s'agit d'écoulements confinés entre deux plans parallèles (tous deux immobiles cette fois), mais non restreints à la seule direction  $x$ . Les deux plans sont extrêmement rapprochés (écartement de l'ordre du millimètre), et les vitesses très lentes, de telle façon que le nombre de Reynolds  $Re = V h/\nu$  est très petit. On a alors affaire à des écoulements "rampants", ou de Stokes, pour lesquels il est justifié de négliger les termes convectifs dans les équations de Navier-Stokes.

Du fait du faible écartement des deux plans, la dérivée seconde  $u_{zz}$  l'emporte largement sur  $u_{xx}$  et  $u_{yy}$  (de même pour  $v$ ), si bien que les équations de Navier-Stokes s'approximent par :

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu u_{zz}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_y + \nu v_{zz}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_z$$

De la dernière équation on déduit comme précédemment que la pression  $p$  ne dépend pas de  $z$  :  $p = p(x,y)$ . On obtient alors les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse sous la forme :

$$u(x,y,z) = \frac{1}{2\mu} p_x(x,y) z(z-h) \quad (2.5)$$

$$v(x,y,z) = \frac{1}{2\mu} p_y(x,y) z(z-h) \quad (2.6)$$

La condition de continuité nous donne une condition supplémentaire sur la pression :

$$p_{xx} + p_{yy} = 0$$

Par ailleurs on remarque que  $u$  et  $v$  vérifient :

$$v_x - u_y = 0$$

L'écoulement est donc irrotationnel dans le plan  $xy$  ! Il est paradoxal que des écoulements extrêmement lents de fluides visqueux permettent de générer des écoulements "irrotationnels" (les deux autres composantes  $w_y - v_z$  et  $u_z - w_x$  du rotationnel sont évidemment loin d'être nulles). Il n'en reste pas moins que les écoulements de Hele-Shaw sont un bon moyen de visualiser des écoulements plans irrotationnels, comme le montrent les photographies de la figure 2.2 (tirées de "An album of fluid motion", de Van Dyke).

## 2.4 Écoulement dans un tuyau (Poiseuille)

Ce cas ne diffère de l'écoulement entre deux plans (le plan supérieur étant immobile) que par la géométrie, qui est tridimensionnelle. Expriment que la vitesse  $u$  ne dépend que de la distance radiale  $r$ , et que  $v \equiv w \equiv 0$ , on obtient encore que le gradient de pression  $p_x$  est constant et que  $u(r)$  satisfait :

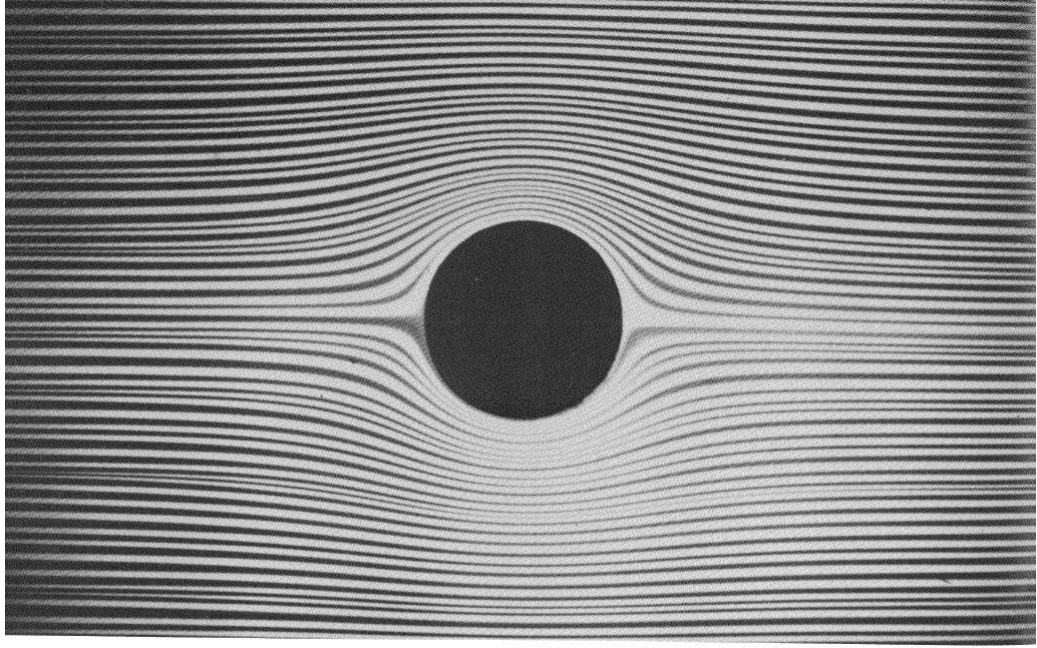
$$0 = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) \quad (2.7)$$

dont la résolution, compte tenu que  $u(r_0) = 0$  ( $r_0$  étant le rayon du cylindre) fournit :

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} p_x (r_0^2 - r^2) \quad (2.8)$$

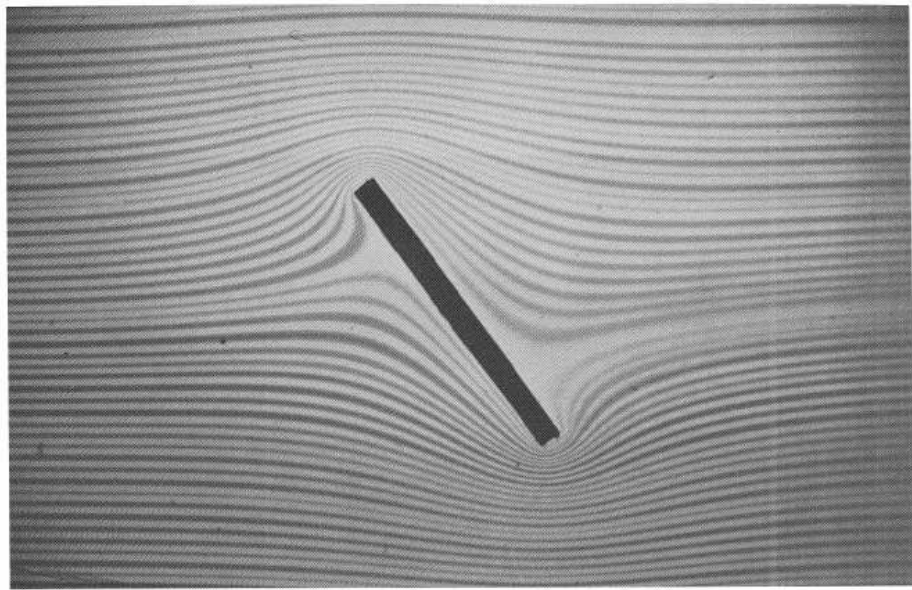
On peut en déduire diverses informations, comme la vitesse sur l'axe médian :

$$u(0) = -\frac{1}{4\mu} p_x r_0^2 \quad (2.9)$$



1. Hele-Shaw flow past a circle. Dye shows the streamlines in water flowing at 1 mm per second between glass plates spaced 1 mm apart. It is at first sight paradoxical that the best way of producing the unseparated pattern of plane potential flow past a bluff object, which

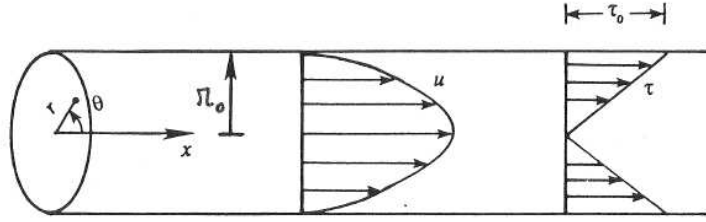
would be spoiled by separation in a real fluid of even the slightest viscosity, is to go to the opposite extreme of creeping flow in a narrow gap, which is dominated by viscous forces. Photograph by D. H. Peregrine



3. Hele-Shaw flow past an inclined plate. The Hele-Shaw analogy cannot represent a flow with circulation. It therefore shows the streamlines of potential flow past an

inclined plate with zero lift. Dye flows in water between glass plates spaced 1 mm apart. Photograph by D. H. Peregrine

FIG. 2.2 – *Ecoulements de Hele-Shaw autour d'un cylindre et d'une forme rectangulaire.*



la vitesse moyennée dans la section :

$$u_m = -\frac{1}{8\mu} p_x r_0^2 = \frac{1}{2} u(0) \quad (2.10)$$

la force de frottement agissant sur une longueur  $l$  de tube :

$$F_x = -2\pi r_0 l \mu u_r(r_0) = -\pi r_0^2 l p_x \quad (2.11)$$

qui est donc équilibrée par le différentiel de pression  $p_x l$  agissant sur la section du tube.

Lorsqu'on compare ces résultats théoriques à l'expérience on observe un bon accord tant que le nombre de Reynolds  $Re = u_m D/\nu$  ( $D$  étant le diamètre) reste inférieur à une certaine valeur, de l'ordre de 2000. Au delà l'écoulement cesse d'être laminaire (à filets fluides parallèles) et devient turbulent.

## 2.5 Plaque plane en mouvement sinusoïdal

On a jusqu'ici traité des écoulements permanents où la variable temps ne joue pas.

On considère maintenant un cas où le terme  $\vec{V}_t$  de l'accélération intervient, qui est celui où le plan  $z = 0$  est animé d'un mouvement sinusoïdal suivant la direction  $x$ , de vitesse :

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

le gradient de pression étant nul. Ce problème est équivalent à celui d'un fluide en écoulement sinusoïdal au dessus d'une plaque plane fixe, cas qui s'apparente à celui de la couche limite induite par la houle sur le fond marin.

La plaque étant supposée infinie,  $u$  ne dépend que de  $z$  et de  $t$ . Par les conditions de continuité et d'adhérence il en découle à nouveau que  $w \equiv 0$ . Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à :

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu u_{zz} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} p_z \end{aligned}$$

De la deuxième équation on déduit que la pression est constante suivant  $z$ , donc égale à la pression extérieure à la couche limite qui se développe près de la plaque. Au-delà d'une certaine distance à la plaque, le fluide est au repos, donc le gradient de pression suivant  $x$  est aussi nul.

Il reste à résoudre :

$$u_t = \nu u_{zz} \quad (2.12)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(0,t) &= U(t) \\ u(z,t) &\rightarrow 0 \quad \text{pour } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

On suppose qu'un régime établi a été atteint, si bien que, l'équation ci-dessus étant linéaire,  $u(z,t)$  varie sinusoidalement en temps à la pulsation  $\omega$  :

$$u(z,t) = \Re \{ f(z) e^{i\omega t} \}$$

L'équation (2.12) prend alors la forme :

$$i\omega f = \nu f_{zz} \quad (2.13)$$

de solution générale

$$f = \alpha e^{\lambda z}$$

avec  $\lambda = \pm(1+i) \sqrt{\omega/(2\nu)}$ .

On cherche une solution décroissante à l'infini, donc la partie réelle de  $\lambda$  doit être négative. La condition d'adhérence sur la plaque permet alors de déterminer  $\alpha$  et on obtient :

$$u(z,t) = U_0 \Re \left\{ e^{-(1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} z} e^{i\omega t} \right\}$$

soit :

$$u(z,t) = U_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} z} \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} z \right) \quad (2.14)$$

La figure 2.3 montre les profils de vitesse obtenus à différents instants.

Le mouvement des particules fluides s'amortit de façon exponentielle avec la distance au plan  $z = 0$ . Par exemple pour une période d'oscillation de 10 secondes et pour  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (eau), il est déjà diminué de 99 % à une distance de 8 mm.

La contrainte de frottement est donnée par :

$$\sigma_{xz} = \mu u_z(0,t) = -\rho U_0 \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}} (\cos \omega t - \sin \omega t) \quad (2.15)$$

et est donc déphasée de 45 degrés par rapport à la vitesse. On peut en déduire par exemple l'énergie dissipée sur une période par unité de surface :

$$\Delta E = \rho \pi U_0^2 \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \quad (2.16)$$

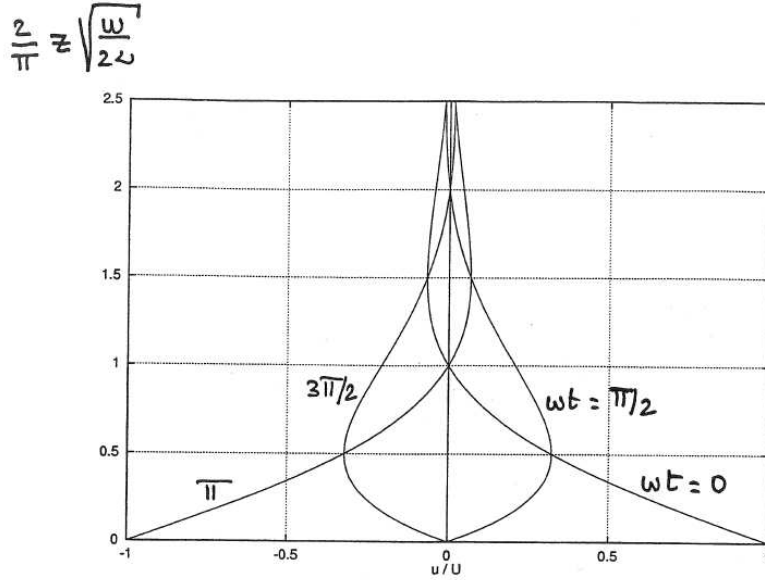


FIG. 2.3 – Plaque plane en mouvement sinusoïdal. Profils de vitesse.

## 2.6 Plaque plane en mouvement impulsif

On considère maintenant le cas où le fluide est au repos jusqu'à l'instant  $t = 0$  où la plaque est mise en route à la vitesse constante  $U_0$ . L'équation à résoudre reste la même :

$$u_t = \nu u_{zz} \quad (2.12)$$

avec les conditions aux limites :

$$u(z,t) = 0 \quad \text{pour } t < 0$$

$$u(0,t) = U_0 \quad \text{pour } t \geq 0$$

$$u(z,t) \rightarrow 0 \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{et } z \rightarrow \infty$$

C'est là un problème classique (équation de la chaleur avec conditions initiales ou problème de Cauchy) dont la solution est bien connue. La façon la plus naturelle de l'obtenir est par transformée de Laplace. Ici on va suivre une autre démarche, plus physique, basée sur l'analyse dimensionnelle.

De la façon la plus générale, la vitesse  $u$  est une fonction de  $z$ , de  $t$ , de la vitesse  $U_0$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  :

$$u = f(z,t,U_0,\nu)$$

Les équations du problème étant linéaires,  $u$  varie linéairement avec  $U_0$  :

$$u = U_0 f(z,t,\nu)$$

$z$ ,  $t$  et  $\nu$  étant de dimensions différentes, on ne peut les combiner qu'en un seul paramètre adimensionnel, par exemple  $z^2/\nu t$  (ou toute puissance de ce paramètre). Ceci suggère donc d'utiliser  $z^2/\nu t$  comme nouvelle variable. De fait les équations se simplifient davantage si l'on utilise  $\eta = z/(2\sqrt{\nu t})$  :

$$u = U_0 f(\eta)$$

Avec ce changement de variable l'équation (2.12) se transforme en :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad (2.17)$$

avec  $f(0) = 1$  et  $f(\infty) = 0$ .

On obtient

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = C e^{-\eta^2}$$

D'où

$$f = D + C \int_0^\eta e^{-\chi^2} d\chi$$

les constantes  $C$  et  $D$  étant déterminées par les conditions aux limites, d'où :

$$f = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\chi^2} d\chi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-\chi^2} d\chi = \operatorname{erfc}(\eta) \quad (2.18)$$

les fonctions "erf" et "erfc" étant les fonctions "erreur" et "erreur complémentaire".

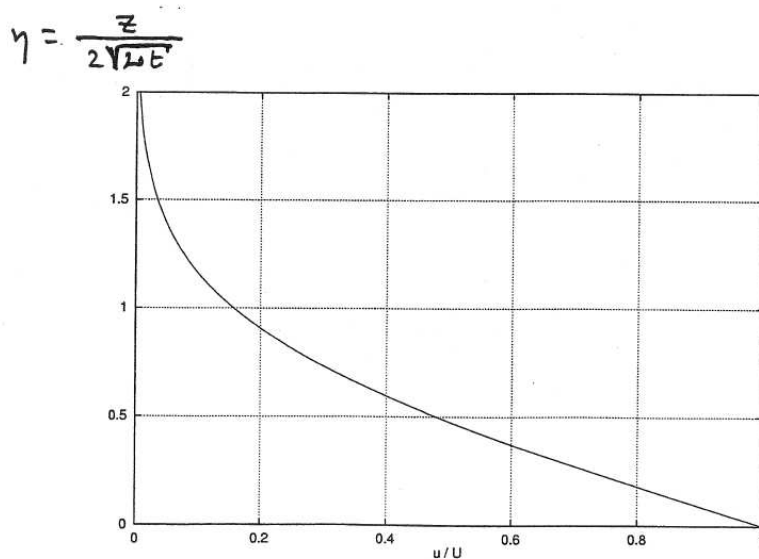


FIG. 2.4 – *Plaque plane en mouvement impulsif. Profil de vitesse.*

La figure 2.4 présente l'allure de  $f$  en fonction de  $\eta$ . Si l'on prend comme épaisseur de couche limite la valeur de  $z$  telle que la vitesse locale est 1 % de la vitesse de la plaque, on obtient approximativement :

$$\delta = 3.64 \sqrt{\nu t} \quad (2.19)$$

Pour de l'eau ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ), on obtient que l'épaisseur de couche limite est de 3.6 mm après une seconde, et 22 cm après une heure.

## 2.7 Écoulement sur une plaque plane semi-infinie

On considère donc un écoulement incident de vitesse  $U$  suivant  $x$  qui aborde, à  $x = 0$  une plaque plane semi-infinie (figure 2.5). Si on suit une particule fluide provenant des  $x$  négatifs et abordant le voisinage de la plaque plane, on sent une certaine similarité avec le problème précédent, lorsqu'on remplace le temps  $t$  par le rapport  $x/U$ , qui est le temps pendant lequel la particule a "ressenti" la plaque.

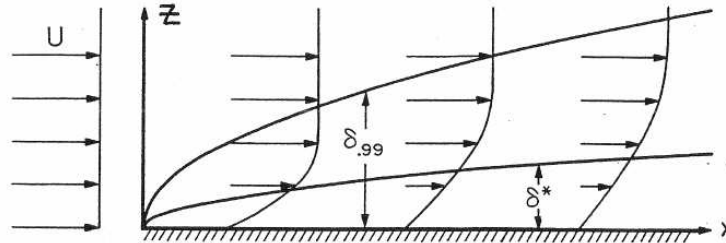


FIG. 2.5 – Plaque plane semi-infinie.

On pressent donc une épaisseur de couche limite  $\delta(x)$  proportionnelle à  $\sqrt{\nu x/U} = x/\sqrt{Re}$  où  $Re$  est le nombre de Reynolds "local"  $Ux/\nu$ .

Notre intérêt ici est pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, où  $\delta \ll x^2$

Dans leur généralité les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_x + w_z &= 0 \\ u u_x + w u_z &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu (u_{xx} + u_{zz}) \\ u w_x + w w_z &= -\frac{1}{\rho} p_z + \nu (w_{xx} + w_{zz}) \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u = w = 0 &\text{ sur la plaque } (z = 0 \quad x > 0) \\ u = U &\text{ pour } z \rightarrow \infty \text{ ou } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

A une distance  $x$  telle que  $Re = Ux/\nu \gg 1$  on attend une couche limite d'épaisseur  $\delta(x) \sim x/\sqrt{Re(x)}$ . La composante  $u$  de la vitesse varie donc de 0 à  $U$  sur une distance  $\delta$  petite si bien que  $u_z$  est dominant par rapport à  $u_x$ , donc à  $w_z$  en vertu de l'équation de continuité.  $w$  étant nul à la paroi, il est donc petit, ainsi que ses dérivées, dans la couche limite.

On peut formaliser ces considérations en introduisant les variables sans dimensions  $x', z', u', w', p'$  reliées aux précédentes par :

$$x' = \frac{x}{L} \quad z' = \sqrt{Re} \frac{z}{L} \quad u' = \frac{u}{U} \quad w' = \sqrt{Re} \frac{w}{U} \quad p' = \frac{p}{\rho U^2}$$

---

2. Il y a évidemment un problème pathologique au voisinage du bord d'attaque, où  $Re$  n'est pas grand, que l'on espère sans incidence sur le résultat final — ce qui restera à vérifier a posteriori.

où  $L$  est une longueur de référence (la longueur de la plaque) et  $Re = U L/\nu$ . Les équations de Navier-Stokes se transforment en :

$$\begin{aligned} u'_{x'} + w'_{z'} &= 0 \\ u' u'_{x'} + w' u'_{z'} &= -p'_{x'} + \frac{1}{Re} u'_{x'x'} + u'_{z'z'} \\ \frac{1}{Re} (u' w'_{x'} + w' w'_{z'}) &= -p'_{z'} + \frac{1}{Re^2} w'_{x'x'} + \frac{1}{Re} w'_{z'z'} \end{aligned}$$

On passe alors à la limite  $Re \rightarrow \infty$ , ce qui mène au système d'équations, ré-écrites en variables dimensionnelles :

$$u_x + w_z = 0 \quad (2.20)$$

$$u u_x + w u_z = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu u_{zz} \quad (2.21)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} p_z \quad (2.22)$$

Par rapport au système initial, on a donc négligé  $u_{xx}$  devant  $u_{zz}$ , ce qui paraît raisonnable, et conservé le seul terme en  $p_z$  de la dernière équation, ce qui peut sembler moins intuitif (c'est néanmoins ce que l'on avait obtenu dans tous les cas pratiques traités plus haut, où  $u$  ne dépendait pas de  $x$ ; ici  $u$  dépend de  $x$ , mais "faiblement", à l'échelle de la couche limite). On en tire que, à  $x$  donné, la pression est constante dans la couche limite, et égale à la pression extérieure. La vitesse extérieure étant ici constante et égale à  $U$ , la pression ne dépend pas non plus de  $x$  et il reste finalement à résoudre :

$$u_x + w_z = 0 \quad (2.23)$$

$$u u_x + w u_z = \nu u_{zz} \quad (2.24)$$

Toujours par analogie avec le problème précédent on introduit la variable intermédiaire  $\eta = z \sqrt{U/(\nu x)}$  et on écrit les composantes  $u$  et  $w$  de la vitesse sous la forme :

$$u = U F(\eta) \quad w = U \frac{1}{\sqrt{Re(x)}} G(\eta) = \sqrt{\frac{U\nu}{x}} G(\eta) \quad (2.25)$$

Les équations (2.23) et (2.24) se transforment en :

$$-\frac{1}{2} \eta F' + G' = 0 \quad (2.26)$$

$$-\frac{1}{2} \eta F F' + F' G = F'' \quad (2.27)$$

On pose alors  $f(\eta)$  telle que

$$F = \frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$$

d'où, de l'équation (2.26)

$$G = \frac{1}{2} \eta f' - \frac{1}{2} f$$

et l'équation (2.27) donne alors :

$$f f'' + 2 f''' = 0 \quad (2.28)$$

avec les conditions aux limites :

$$f = f' = 0 \quad \text{pour } \eta = 0 \quad \quad f' = 1 \quad \text{pour } \eta = \infty$$

( $f(0) = 0$  car  $G(0) = 0$  et  $f'(0) = 0$ ).

La résolution de l'équation (2.28) doit être effectuée numériquement. La figure 2.6 présente l'allure obtenue pour  $f$  et ses dérivées, en fonction de  $\eta$ . Les figures 2.7 et 2.8 montrent que le profil théorique de vitesse dans la couche limite est en excellent accord avec les mesures expérimentales.

A noter que  $G(\infty)$  n'est pas nul. En fait on obtient  $w(x, \infty) = 0.8604 U / \sqrt{Re(x)}$ . Cela signifie que, à la frontière de la couche limite, l'écoulement est dévié vers l'extérieur.

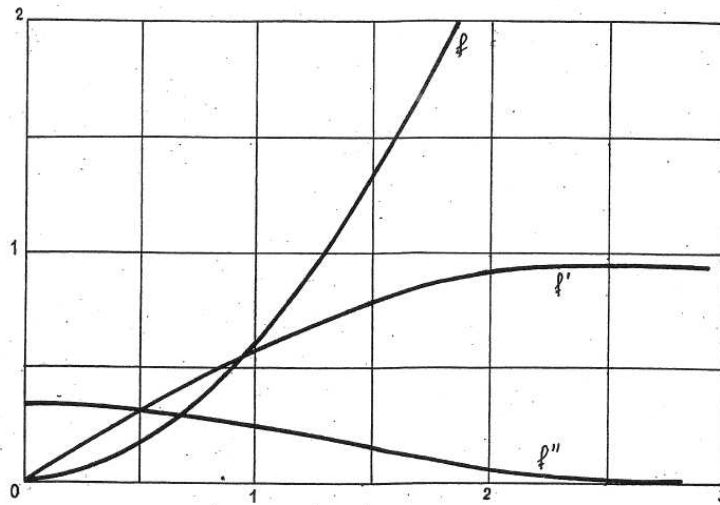


FIG. 2.6 – Blasius. La fonction  $f$  et ses dérivées.

La force de frottement sur la plaque peut s'obtenir à partir de la contrainte de cisaillement :

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} F'(0) = \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(0) \quad (2.29)$$

où la valeur numérique obtenue pour  $f''(0)$  est 0.332.

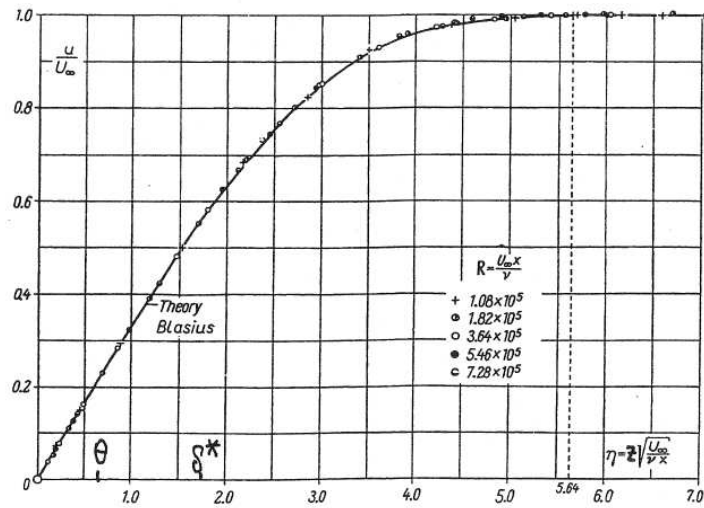
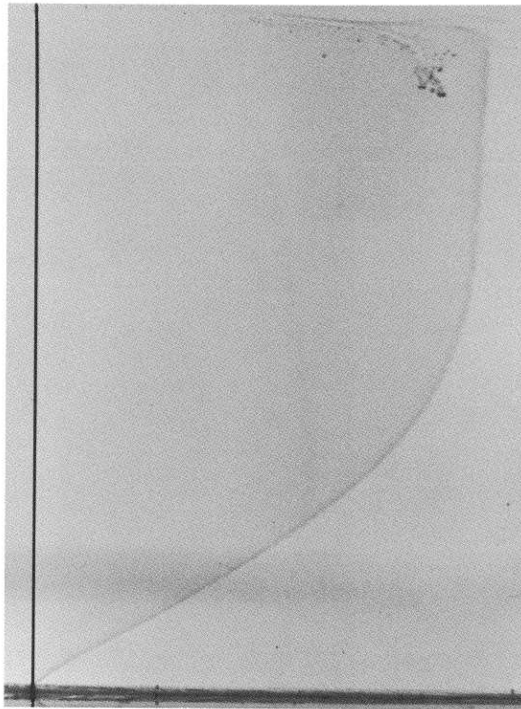


FIG. 2.7 – Blasius. Profil de vitesse théorique et mesures.



30. Blasius boundary-layer profile on a flat plate. The tangential velocity profile in the laminar boundary layer on a flat plate, discovered by Prandtl and calculated accurately by Blasius, is made visible by tellurium. Water is flowing at 9 cm/s. The Reynolds number is 500 based on distance from the leading edge, and the displacement thickness is about 5 mm. A fine tellurium wire perpendicular to the plate at the left is subjected to an electrical impulse of a few milliseconds duration. A chemical reaction produces a slender colloidal cloud, which drifts with the stream and is photographed a moment later to define the velocity profile. Photograph by F. X. Wortmann

FIG. 2.8 – Blasius. Profil de vitesse expérimental (axes inversés par rapport à la figure précédente).

L'intégration de (2.29) de 0 à  $l$  donne la force de frottement sur (un côté d') une plaque de longueur  $l$  :

$$F = 0.332 U^{3/2} \rho \nu^{1/2} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$F = 0.664 \rho \nu^{1/2} U^{3/2} l^{1/2} \quad (2.30)$$

Le coefficient de friction  $C_F$  défini par :

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \rho U^2 l}$$

est alors égal à :

$$C_F = 1.328 \nu^{1/2} U^{-1/2} l^{-1/2} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \quad (2.31)$$

Cette relation est bien vérifiée par l'expérience, tant que l'écoulement reste laminaire, c'est à dire pour des nombres de Reynolds inférieurs à  $2 \cdot 10^5$  (environ).

En ce qui concerne l'épaisseur de couche limite  $\delta_{0.99}$ , on obtient que la vitesse incidente  $U$  est réduite de 1 % pour une distance à la plaque donnée approximativement par  $\eta \simeq 5$ , soit :

$$\delta_{0.99} \simeq 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (2.32)$$

## 2.8 Les épaisseurs de couche limite

Cette définition d'épaisseur de couche limite est quelque peu arbitraire. Un concept plus physique est celui d'**épaisseur de déplacement**  $\delta^*$ , définie par une équivalence de débit :

$$\int_0^D U(x) dz = \int_0^{D+\delta^*} u(x,z) dz = \int_0^D u(x,z) dz + \delta^* U(x)$$

où  $D \gg \delta$  soit, en passant à la limite  $D \rightarrow \infty$  :

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u(x,z)}{U(x)} \right) dz \quad (2.33)$$

$\delta^*$  s'interprète donc comme la surépaisseur à donner au profil pour obtenir le même débit extérieur en fluide parfait, ou comme la distance dont sont déviées les lignes de courant à l'extérieur de la couche limite.

On définit de même une **épaisseur de quantité de mouvement**  $\theta$  à partir de l'équivalence des flux de quantité de mouvement :

$$\int_0^D U^2(x) dz = \int_0^{D+\delta^*+\theta} u^2(x,z) dz = \int_0^D u^2(x,z) dz + (\delta^* + \theta) U^2(x)$$

ce qui donne :

$$\theta(x) = \int_0^\infty \frac{u(x,z)}{U(x)} \left( 1 - \frac{u(x,z)}{U(x)} \right) dz \quad (2.34)$$

Pour le cas considéré de l'écoulement sur une plaque plane sans gradient de pression on obtient :

$$\delta^*(x) = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (2.35)$$

$$\theta(x) = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (2.36)$$

## 2.9 Couche limite sur un profil

Les équations de couche limite (2.20) et (2.21) établies au paragraphe précédent restent valables dans les hypothèses suivantes :

- le rayon de courbure local est grand devant l'épaisseur de couche limite (sont donc exclues les géométries présentant des angles vifs) ;
- la couche limite est laminaire ;
- l'écoulement est non séparé.

Les coordonnées  $(x, z)$  s'interprètent alors comme les coordonnées locales tangentielle et normale au profil, et le terme  $p_x$  comme le gradient de pression tangentielle. Il se relie à la vitesse  $U(x)$  de l'écoulement extérieur par :

$$p_x = -\rho U U_x$$

$x$  s'interprétant toujours comme une abscisse curviligne. On a supposé ici que la vitesse de l'écoulement ne dépend pas de la variable temps.

On peut alors résoudre le problème par un processus itératif : on calcule l'écoulement extérieur en fluide parfait ; on résout les équations de couche limite (2.20) (2.21) et on en déduit une première épaisseur de déplacement  $\delta_1^*$  ; on épaissit le profil de  $\delta_1^*$  et on recalcule un nouvel écoulement extérieur en fluide parfait, etc. Ce processus converge assez rapidement dans la plupart des cas.

Par rapport au cas de la plaque considérée au paragraphe précédent, la modification provient du gradient de pression  $p_x$ . Un gradient de pression négatif tend à accélérer l'écoulement et a un effet stabilisant sur la couche limite. Au contraire un gradient positif tend à la ralentir et à l'épaissir jusqu'au point (éventuel) où la vitesse de l'écoulement se renverse dans la couche limite : il y a décollement de l'écoulement (figures 2.9 et 2.10).

Pratiquement, sur un profil fermé, il y a accélération de l'écoulement du point de stagnation amont jusqu'à un certain point, puis ralentissement jusqu'au point de stagnation aval. Il y a donc risque de décollement, et ce d'autant plus que le corps est mal profilé. Par exemple sur un cylindre circulaire, le décollement (en régime laminaire) survient à environ 82 degrés après le point de stagnation amont.<sup>3</sup>

Le décollement est un phénomène qui n'affecte pas seulement la couche limite, mais globalement tout l'écoulement autour du profil. Au lieu d'être confinée au voisinage de la paroi la vorticité se répand dans tout le fluide (ce qui remet en cause les approches de fluide parfait

---

3. Cet angle de 82 dégrés peut surprendre puisque situé dans la partie amont du cylindre où l'écoulement potentiel est encore accéléré. De fait si l'on effectue le calcul de couche limite en prenant comme écoulement extérieur l'écoulement potentiel sur le cylindre non épaissi on obtient que le point de séparation se situe sur la partie arrière, à environ 105 dégrés du point de stagnation amont. Cet exemple met bien en évidence le couplage entre écoulement extérieur et écoulement dans la couche limite, et la nécessité de procéder à des itérations.

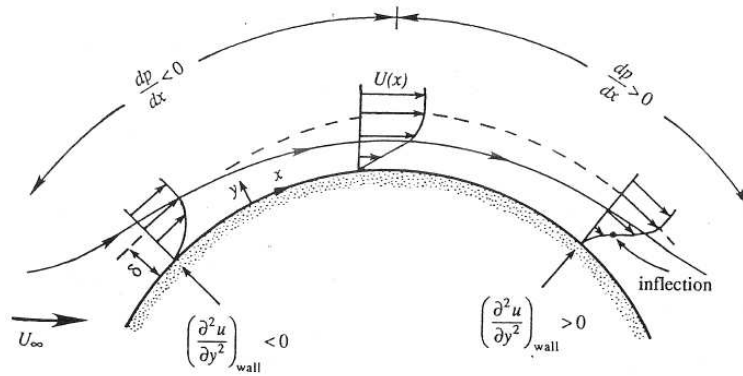


FIG. 2.9 – Profils de vitesse et gradient de pression sur un profil.

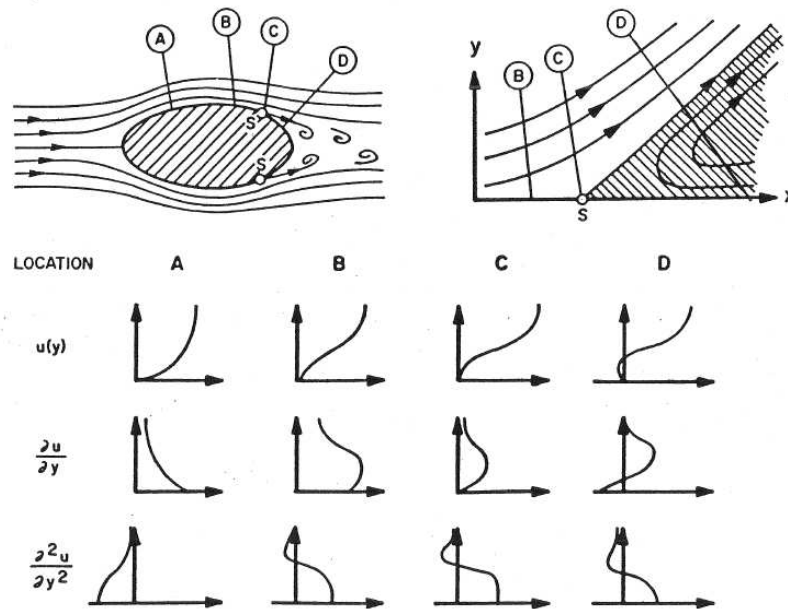
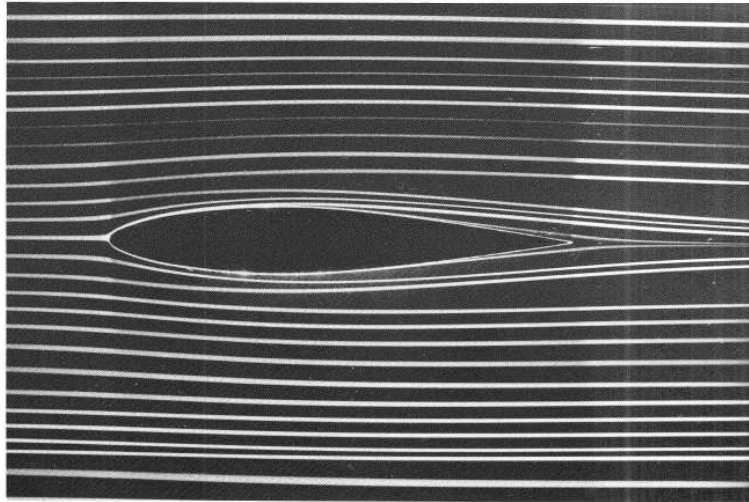


FIG. 2.10 – Profils de vitesse avant et après le décollement.

pour calculer l'écoulement extérieur), il apparaît un sillage avec une chute de pression sur la partie arrière du profil, d'où des efforts de traînée, etc. Un des intérêts des calculs de couche limite est de mettre en évidence le risque de décollement de l'écoulement, et de prédire à quel point du profil il apparaît. On conçoit aisément le besoin de ce genre d'information par exemple pour dimensionner des profils portants (ailes d'avion ou, en hydrodynamique, gouvernes et safrans).

Les figures 2.11 et 2.12 présentent des visualisations d'écoulement, attaché ou séparé, sur deux profils.

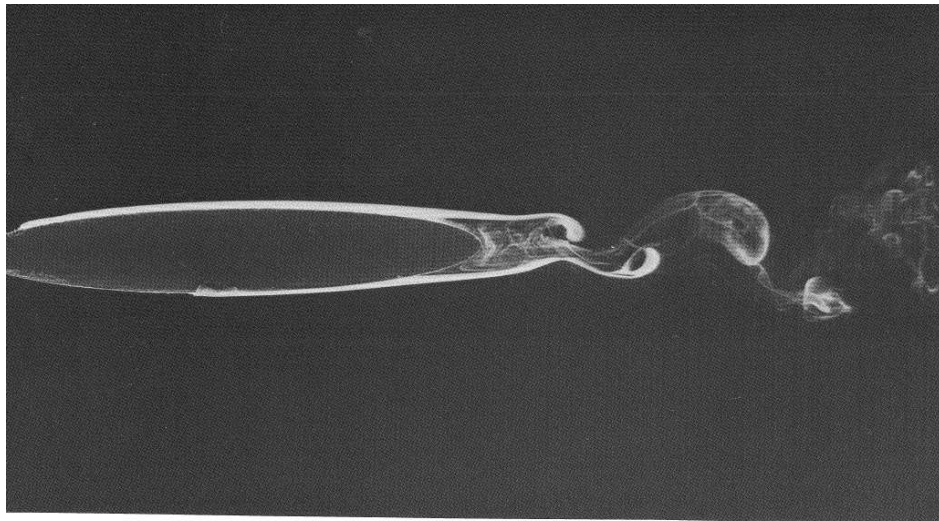
Mathématiquement le point de décollement correspond à une abscisse  $x$  telle que la vitesse



23. Symmetric plane flow past an airfoil. An NACA 64A015 profile is at zero incidence in a water tunnel. The Reynolds number is 7000 based on the chordlength. Streamlines are shown by colored fluid introduced up-

stream. The flow is evidently laminar and appears to be unseparated, though one might anticipate a small separated region near the trailing edge. ONERA photograph, Werlé 1974

FIG. 2.11 – *Ecoulement attaché sur un profil.*



32. Laminar separation on a thin ellipse. A 6:1 elliptic cylinder is held at zero angle of attack in a wind tunnel. The Reynolds number is 4000 based on chord. Drops of ti-

tanium tetrachloride on the surface form white smoke, which shows the laminar boundary layer separating at the rear. Bradshaw 1970

FIG. 2.12 – *Ecoulement décollant sur une forme elliptique.*

$u(x,z)$  dans la couche limite vérifie :

$$u_z(x,0) = 0$$

### 2.9.1 L'équation de von Karman

Cette équation permet d'exprimer simplement la contrainte de cisaillement à la paroi  $\sigma_{xz}(x) = \mu u_z(x,0)$  à partir des épaisseurs de couche limite  $\delta^*$  et  $\theta$ . Partant de l'équation (2.21) :

$$u u_x + w u_z = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu u_{zz}$$

soit, comme  $p_x = -\rho U U_x$  :

$$u u_x + w u_z - U U_x = \nu u_{zz}$$

Par intégration de  $z = 0$  à  $z = h$ , où  $h$  est une distance indépendante de  $x$  et grande devant l'épaisseur de couche limite :

$$\int_0^h (u u_x + w u_z - U U_x) dz = \int_0^h \nu u_{zz} dz = -\frac{1}{\rho} \sigma_{xz} \quad (2.37)$$

On tire alors parti de l'équation de continuité  $u_x + w_z = 0$  pour éliminer la composante  $w$  de la vitesse par :

$$w(x,z) = -\int_0^z u_x dt$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^h w u_z dz &= -\int_0^h \left( u_z \int_0^z u_x dt \right) dz \\ &= -U \int_0^h u_x dt + \int_0^h u u_x dz \\ &= \int_0^h (u u_x - U u_x) dz \end{aligned}$$

L'équation (2.37) prend donc la forme :

$$\int_0^h (2u u_x - U u_x - U U_x) dz = -\frac{1}{\rho} \sigma_{xz}$$

ou encore

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [u (U - u)] dz + U_x \int_0^h (U - u) dz = \frac{1}{\rho} \sigma_{xz}$$

$h$  ne dépendant pas de  $x$  il est licite de sortir la dérivation en  $x$  de l'intégrale et de passer à la limite  $h \rightarrow \infty$ . On obtient donc finalement :

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \theta) + \delta^* U U_x \quad (2.38)$$

## 2.9.2 Méthode approchée de résolution des équations de couche limite

En pratique les équations de couche limite sont résolues numériquement par des techniques de différences finies ou autres (méthode intégrale, caractéristiques). Il n'y a guère d'autre voie en tridimensionnel, où la troisième dimension vient quelque peu alourdir les équations. Si l'on reste en deux dimensions, il existe des méthodes approchées de mise en œuvre assez simple, telle la méthode dite de Polhausen.

L'idée est de tenir compte exactement des conditions aux limites à la paroi, d'effectuer le raccordement avec la solution extérieure à une distance finie  $\delta(x)$  de la paroi, et de satisfaire de façon globale aux équations de couche limite entre  $z = 0$  et  $z = \delta$ , de façon à produire la bonne contrainte de frottement. D'où l'intérêt de la relation de von Kármán, que l'on vient d'établir.

On écrit ainsi la vitesse  $u(x,z)$ , rapportée à la vitesse extérieure  $U(x)$ , sous la forme d'un polynôme de degré 4 en  $z/\delta(x)$  :

$$\frac{u(x,z)}{U(x)} = a(x) \left( \frac{z}{\delta(x)} \right) + b(x) \left( \frac{z}{\delta(x)} \right)^2 + c(x) \left( \frac{z}{\delta(x)} \right)^3 + d(x) \left( \frac{z}{\delta(x)} \right)^4 \quad (2.39)$$

La condition d'adhérence est automatiquement respectée. Les conditions de raccordement en  $z = \delta$  sont  $u = U$  et  $u_z = 0$ , d'où l'on tire, d'après l'équation (2.21) que l'on doit également avoir  $u_{zz}(x,\delta) = 0$ . La dernière condition est celle qui relie  $u_{zz}(x,0)$  à  $p_x$  :

$$\nu u_{zz}(x,0) = -U U_x$$

On a ainsi 4 équations pour déterminer les 4 constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . On les exprime habituellement à partir du paramètre sans dimension

$$\Lambda(x) = \frac{\delta^2(x)}{\nu} U_x(x) \quad (2.40)$$

ce qui donne

$$a = 2 + \frac{\Lambda}{6} \quad b = -\frac{\Lambda}{2} \quad c = -2 + \frac{\Lambda}{2} \quad d = 1 - \frac{\Lambda}{6} \quad (2.41)$$

En fonction de la valeur prise par  $\Lambda$  est ainsi définie toute une famille de profils  $u/U$ , donnés sur la figure 2.13. On note que  $\Lambda = 0$  correspond au cas précédent de la plaque plane sans gradient de pression.  $\Lambda = -12$  donne  $u_z(x,0) = 0$  et correspond donc à un point de décollement. Une autre valeur importante est  $\Lambda = 7.052$ , qui correspond à un point de stagnation ( $U = 0$  et  $U_x \neq 0$ ).

On note que la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  se relie à  $\Lambda$  et à  $\delta$  par :

$$\sigma_{xz} = \mu u_z(x,0) = \frac{\mu U}{\delta} \left( 2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \quad (2.42)$$

Il reste à tenir compte, de façon moyennée, des équations de couche limite entre  $z = 0$  et  $z = \delta$ . Pour cela on utilise la relation de von Kármán (2.38) :

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \theta) + \delta^* U U_x$$

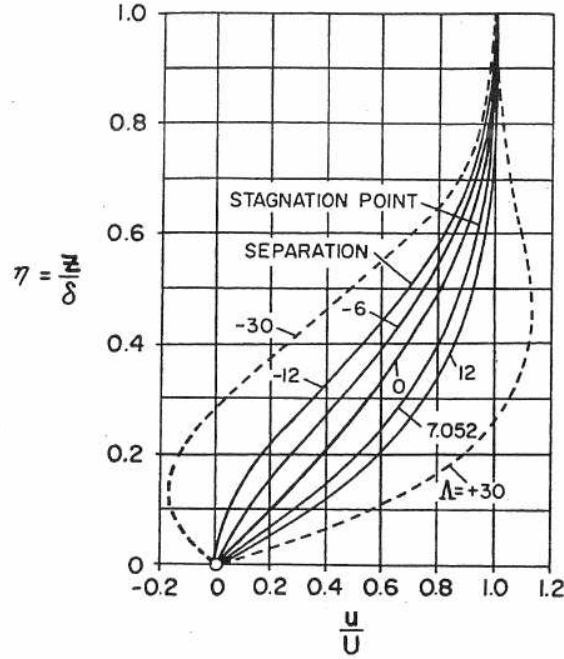


FIG. 2.13 – Méthode de Polhausen. Profils de vitesse en fonction de  $\Lambda$ .

Les épaisseurs  $\delta^*$  et  $\theta$  de couche limite se relient à  $\delta$  et à  $\Lambda$  par l'application des relations (2.33) et (2.34) qui donnent, tous calculs faits :

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \quad (2.43)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{63} \left( \frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right) \quad (2.44)$$

On dispose ainsi de 4 équations (2.38), (2.40), (2.43) et (2.44) pour 4 inconnues :  $\Lambda$ ,  $\delta$ ,  $\delta^*$  et  $\theta$ ,  $U(x)$  étant une donnée du problème. Il existe alors différentes techniques de résolution suivant qu'on se ramène à une équation en  $\theta$ , en  $\Lambda$ , etc. Si l'on choisit cette dernière solution on obtient l'équation d'évolution :

$$\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{U_x}{U} g(\Lambda) + \frac{U_{xx}}{U_x} h(\Lambda) \quad (2.45)$$

où

$$g(\Lambda) = \frac{7257.6 - 1336.32 \Lambda + 37.92 \Lambda^2 + 0.8 \Lambda^3}{213.12 - 5.76 \Lambda - \Lambda^2}$$

$$h(\Lambda) = \frac{213.12 \Lambda - 1.92 \Lambda^2 - 0.2 \Lambda^3}{213.12 - 5.76 \Lambda - \Lambda^2}$$

On constate l'existence d'un problème au point de stagnation amont où  $U = 0$  et  $U_x \neq 0$  : le premier terme du deuxième membre est alors infini à moins de ne choisir  $\Lambda$  de telle façon

que  $g(\Lambda)$  s'annule. Des trois racines possibles  $\Lambda = 7.052$  est celle qui convient. Partant de cette valeur il suffit d'intégrer numériquement l'équation (2.45) en parcourant le profil à partir du point de stagnation amont, jusqu'à (éventuellement) la valeur fatidique  $\Lambda = -12$  qui signifie que l'on a atteint le point de décollement. Un exemple d'application est fourni sur la figure 2.14.

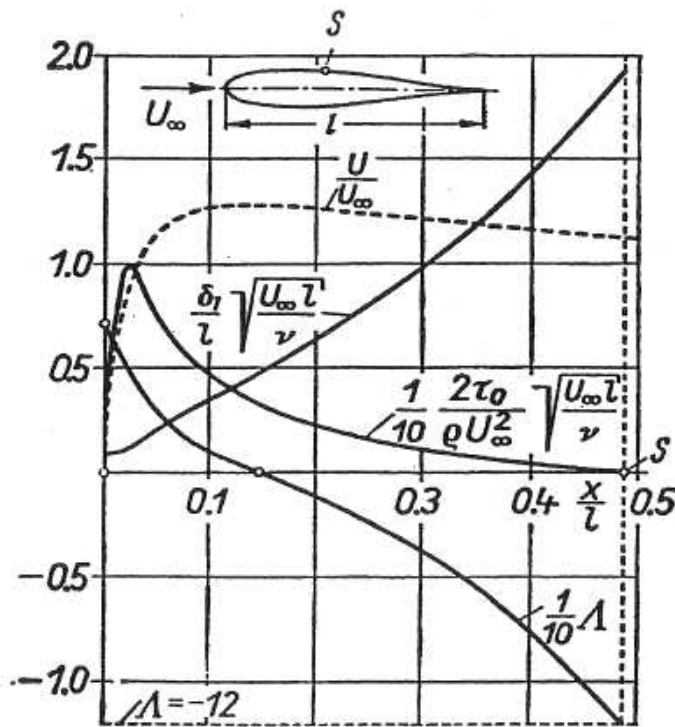


FIG. 2.14 – Application de la méthode de Polhausen à un profil portant symétrique.

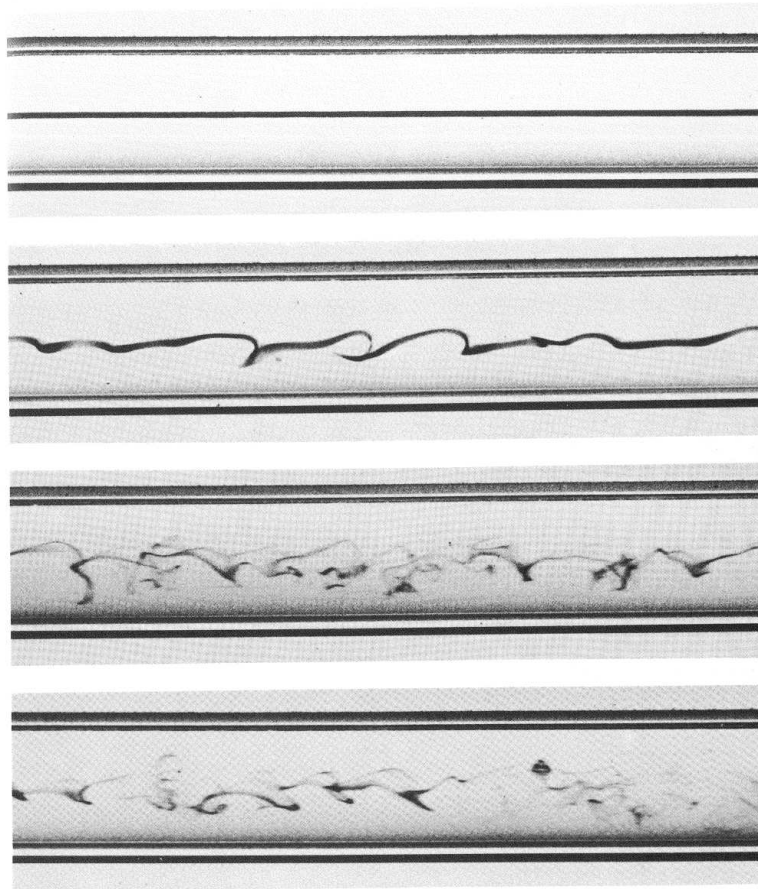
### Exercice :

Appliquer la méthode de Polhausen au cas de la plaque plane semi-infinie et en déduire  $\sigma_{xz}$ ,  $\delta^*$ ,  $\theta$ . Comparer à la solution de Blasius.

## 2.10 Couches limites turbulentes

On a déjà, dans les paragraphes précédents, mentionné le fait que le régime laminaire n'est observé en pratique que tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à un certain seuil. Plus précisément, si l'on considère par exemple l'écoulement de Poiseuille en conduite, il existe un premier nombre de Reynolds  $R_1$  (le nombre de Reynolds étant défini comme  $U_m D/\nu$ , où  $U_m$  est la vitesse moyenne et  $D$  le diamètre), tel que, quelle que soit la perturbation apportée à l'écoulement, celui-ci finit par retourner à un régime laminaire stable.  $R_1$  est de l'ordre de 1000. Au delà il est encore possible d'obtenir des écoulements laminaires, sous réserve de limiter les perturbations possibles, et ce jusqu'à une deuxième valeur  $R_2$  de l'ordre de 50 000.

Après, l'écoulement observé est toujours turbulent, c'est à dire que les trois composantes de la vitesse et la pression présentent des fluctuations assez erratiques autour de nouvelles valeurs moyennes (figure 2.15).



103. Repetition of Reynolds' dye experiment. Osborne Reynolds' celebrated 1883 investigation of stability of flow in a tube was documented by sketches rather than photography. However the original apparatus has survived at the University of Manchester. Using it a century later, N. H. Johannesen and C. Lowe have taken this sequence of photographs. In laminar flow a filament of colored water

introduced at a bell-shaped entry extends undisturbed the whole length of the glass tube. Transition is seen in the second of the photographs as the speed is increased; and the last two photographs show fully turbulent flow. Modern traffic in the streets of Manchester made the critical Reynolds number lower than the value 13,000 found by Reynolds.

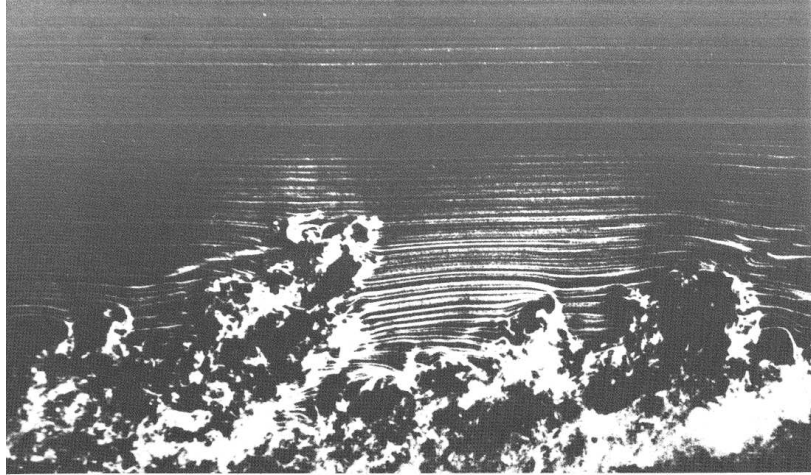
FIG. 2.15 – Répétition de l'expérience de Reynolds.

De même, pour une plaque plane, la turbulence apparaît pour des nombres de Reynolds  $U l/\nu$  compris entre  $2 \cdot 10^5$  et  $4 \cdot 10^6$ . Si l'on considère le cas d'une carène de navire avançant à une vitesse de 10 m/s, cela veut dire que l'écoulement est devenu turbulent après seulement 40 cm de la plaque plane équivalente !

Physiquement l'apparition de la turbulence s'explique par le fait que le glissement de deux fluides l'un sur l'autre est naturellement instable. Cette instabilité est connue sous le nom de Kelvin-Helmoltz. On déduit à ce stade que turbulence et écoulement cisailé sont fortement associés. Par exemple la turbulence apparaît très rapidement à la frontière d'un jet.

### 2.10.1 Les équations de Navier-Stokes moyennées

Pour bien des applications pratiques les valeurs instantanées des paramètres de l'écoulement sont de moindre intérêt que leurs valeurs moyennes. Par exemple dans le cas d'une



157. Side view of a turbulent boundary layer. Here a turbulent boundary layer develops naturally on a flat plate 3.3 m long suspended in a wind tunnel. Streaklines from a smoke wire near the sharp leading edge are illuminated by

a vertical slice of light. The Reynolds number is 3500 based on the momentum thickness. The intermittent nature of the outer part of the layer is evident. Photograph by Thomas Corke, Y. Guezennec, and Hassan Nagib.



158. Turbulent boundary layer on a wall. A fog of tiny oil droplets is introduced into the laminar boundary layer on the test-section floor of a wind tunnel, and the layer then tripped to become turbulent. A vertical sheet of light

shows the flow pattern 5.8 m downstream, where the Reynolds number based on momentum thickness is about 4000. Falco 1977

FIG. 2.16 – *Couche limite turbulente sur une plaque plane.*



FIG. 2.17 – *Écoulement en tuyau. Profils de vitesse laminaire (a) et turbulent (b).*

conduite on cherche à relier gradient moyen de pression et débit moyen ; dans le cas de la résistance à l'avancement d'une carène les fluctuations de la composante visqueuse sont de peu d'incidence sur la vitesse, etc. On peut donc se limiter à l'écoulement moyen et chercher à établir les équations qui le régissent.

On décompose alors composantes de la vitesse et pression en valeurs moyennes et fluctuations :

$$u = \bar{u} + u' \quad v = \bar{v} + v' \quad w = \bar{w} + w' \quad (2.47)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.48)$$

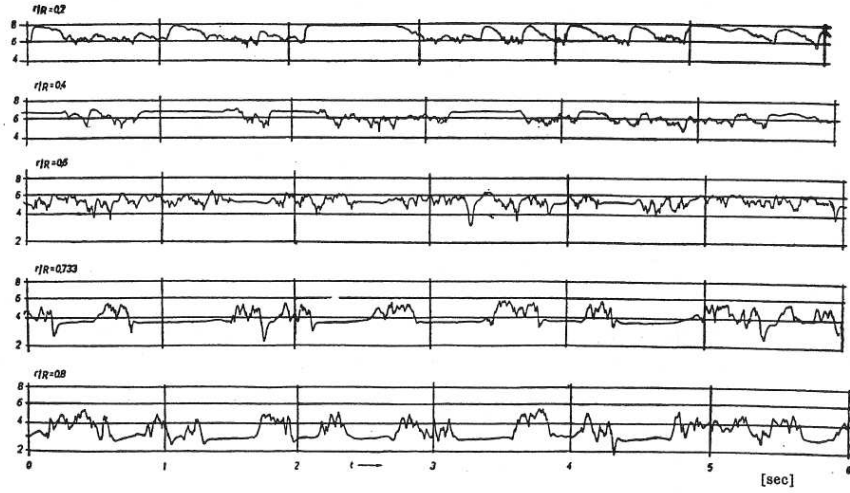


FIG. 2.18 – *Ecoulement en tuyau. Mesures de vitesse à la transition. Noter les différences de vitesse moyenne, en régime laminaire et régime turbulent, suivant la distance à l'axe du cylindre (cf la figure précédente).*

Par valeur moyenne on entend ici "moyenne d'ensemble", au sens statistique. Pour des écoulements permanents il est équivalent de prendre la valeur moyenne en temps (hypothèse d'ergodicité) :

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (2.49)$$

où  $T$  est suffisamment long devant l'échelle de temps des fluctuations.

De l'équation de continuité  $u_x + v_y + w_z = 0$  on tire immédiatement, en séparant valeur moyenne et partie fluctuante :

$$\bar{u}_x + \bar{v}_y + \bar{w}_z = 0 \quad (2.50)$$

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0 \quad (2.51)$$

On retrouve donc la même équation, pour les valeurs moyennes et pour les parties fluctuantes. Ce résultat est directement lié à la linéarité.

En ce qui concerne les équations de Navier-Stokes, la modification, par rapport au cas laminaire, provient des termes convectifs. Si l'on considère par exemple l'équation du mouvement suivant  $x$ , le moyennage en temps fait apparaître le terme :

$$\begin{aligned} \overline{u u_x + v u_y + w u_z} &= \overline{(\bar{u} + u')(\bar{u}_x + u'_x)} + \overline{(\bar{v} + v')(\bar{u}_y + u'_y)} + \overline{(\bar{w} + w')(\bar{u}_z + u'_z)} \\ &= \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + \bar{w} \bar{u}_z + \overline{u' u'_x} + \overline{v' u'_y} + \overline{w' u'_z} \\ &= \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + \bar{w} \bar{u}_z + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u' w'}) \\ &\quad - \overline{u' (u'_x + v'_y + w'_z)} \end{aligned}$$

$$= \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + \bar{w} \bar{u}_z + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u' w'})$$

Les équations de Navier-Stokes moyennées prennent donc la forme :

$$\bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + \bar{w} \bar{u}_z = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_x + \nu \Delta \bar{u} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u' v'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u' w'}) \quad (2.52)$$

$$\bar{v}_t + \bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y + \bar{w} \bar{v}_z = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_y + \nu \Delta \bar{v} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u' v'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v' w'}) \quad (2.53)$$

$$\bar{w}_t + \bar{u} \bar{w}_x + \bar{v} \bar{w}_y + \bar{w} \bar{w}_z = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_z + \nu \Delta \bar{w} - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u' w'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v' w'}) - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'^2}) \quad (2.54)$$

On voit donc apparaître les valeurs moyennes des produits deux à deux des fluctuations de vitesse. Si ces termes étaient connus, on aurait des équations très semblables à celles établies au chapitre 1, avec un tenseur des contraintes modifié :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\bar{u}_x & \bar{u}_y + \bar{v}_x & \bar{u}_z + \bar{w}_x \\ \bar{v}_x + \bar{u}_y & 2\bar{v}_y & \bar{v}_z + \bar{w}_y \\ \bar{w}_x + \bar{u}_z & \bar{w}_y + \bar{v}_z & 2\bar{w}_z \end{pmatrix} - \rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u' v'} & \overline{u' w'} \\ \overline{u' v'} & \overline{v'^2} & \overline{v' w'} \\ \overline{u' w'} & \overline{v' w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Le tenseur additionnel est connu sous le nom de **tenseur de Reynolds**. Il est en général largement dominant par rapport au tenseur de viscosité, sauf au voisinage immédiat des parois où la condition d'adhérence impose  $u' = v' = w' = 0$ . Dans le cas d'une paroi lisse, on a alors une couche de faible épaisseur dominée par les effets visqueux, connue sous le nom de **sous-couche visqueuse**.

Le tenseur de Reynolds se compose donc de termes de contraintes normales ( $-\rho \overline{u'^2}$ ,  $-\rho \overline{v'^2}$ ,  $-\rho \overline{w'^2}$ ) et de termes de cisaillement ( $-\rho \overline{u' v'}$ ,  $-\rho \overline{u' w'}$ ,  $-\rho \overline{v' w'}$ ) qui se réduisent à zéro en turbulence isotrope. Ce n'est pas le cas au voisinage des parois où l'écoulement moyen  $\bar{u}(z)$  est cisailé, comme on peut le comprendre à partir du schéma représenté sur la figure 2.19

On considère une particule fluide animée d'une vitesse verticale  $w' > 0$  et qui passe ainsi d'un niveau  $z$  au niveau  $z + \Delta z$ . Elle arrive à un niveau où la vitesse moyenne locale  $\bar{u}(z + \Delta z)$  est plus grande, et elle tend à ralentir l'écoulement, donc à lui communiquer une modification de vitesse  $u'$  négative. Ainsi une fluctuation  $w'$  positive est plutôt associée à une fluctuation  $u'$  négative, et de même  $w'$  négatif correspond plutôt à  $u'$  positif. On a alors  $\overline{u' w'} < 0$  pour  $\bar{u}_z > 0$ , et donc une augmentation de la viscosité apparente. Sur cet exemple on comprend aussi que la turbulence augmente les échanges de quantité de mouvement entre les nappes fluides. Des conséquences sont qu'une couche limite turbulente est plus épaisse qu'une couche limite laminaire, mais aussi plus stable, du fait du plus grand transfert de quantité de mouvement avec le fluide extérieur.

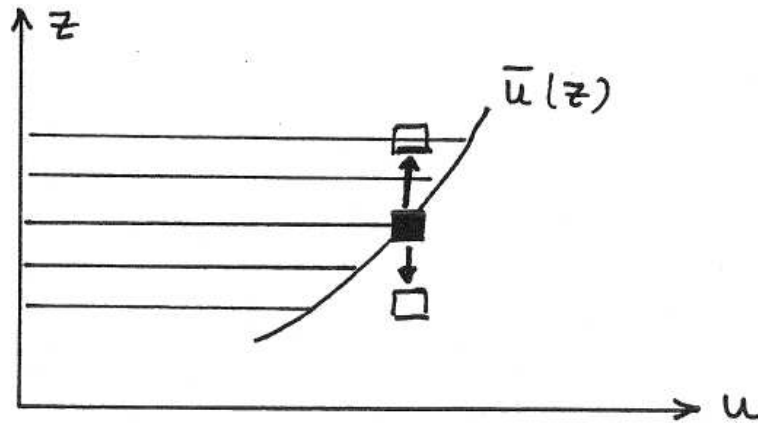


FIG. 2.19 – Effet d'un mouvement perpendiculaire à la paroi d'une particule fluide.

### 2.10.2 Couche limite turbulente sur une plaque plane

On a jusqu'ici éludé le problème d'avoir à expliciter les quantités turbulentes  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$  et  $\overline{u'w'}$ . Dans le cas le plus général d'un écoulement turbulent il est évidemment nécessaire de relier, d'une certaine façon, les quantités turbulentes aux caractéristiques de l'écoulement moyen, ou de faire appel à des considérations théoriques plus élaborées. On n'aborde pas ici cet aspect du problème.

En effet, pour le cas considéré de l'écoulement sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression, il est possible de prédire l'allure de la couche limite à partir de considérations dimensionnelles et empiriques.

Pour cela on remarque que la vitesse moyenne  $\bar{u}(x, z)$  en un point de la couche limite est une fonction de  $\rho$ ,  $U$ ,  $\nu$ ,  $x$  et  $z$ . Indifféremment, en lieu et place de  $U$  et  $x$  on peut prendre comme références la **vitesse de frottement** définie par :

$$u_* = \sqrt{\frac{\sigma_{xz}}{\rho}} \quad (2.56)$$

et l'épaisseur de couche limite  $\delta$  (sous réserve de démontrer que la correspondance est univoque, ce que l'on admettra).

L'analyse dimensionnelle conduit à écrire :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = f\left(\frac{u_* z}{\nu}, \frac{z}{\delta}\right)$$

On fait alors appel à des considérations intuitives qui sont qu'au voisinage immédiat de la paroi, l'importance du terme  $u_* z/\nu$  est prépondérante devant celle de  $z/\delta$ , les termes de Reynolds tendant vers zéro à la paroi. On peut alors écrire :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = f\left(\frac{u_* z}{\nu}, 0\right) = f_1\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) \quad (2.57)$$

avec, compte tenu de la définition de la vitesse de frottement :

$$u_* = \sqrt{\frac{\sigma_{xz}}{\rho}} = \sqrt{\nu \bar{u}_z(x,0)}$$

$$f_1\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) = \frac{u_* z}{\nu} + O\left(\frac{u_* z}{\nu}\right)^2 \quad \text{pour} \quad \frac{u_* z}{\nu} \rightarrow 0$$

Inversement, à la limite extérieure de la couche limite, la viscosité joue un rôle négligeable devant la turbulence et l'écart de vitesse  $(\bar{u} - U)/u_*$  dépend plutôt du deuxième paramètre :

$$\frac{\bar{u} - U}{u_*} = f\left(0, \frac{z}{\delta}\right) = f_2\left(\frac{z}{\delta}\right) \quad (2.58)$$

avec  $f_2(1) = 0$ .

On fait alors une hypothèse hardie qui est qu'il existe un intervalle  $[z_1 \quad z_2]$  où les deux expressions asymptotiques (2.57) et (2.58) se recoupent, c'est à dire que :

$$f_1\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) = \frac{U}{u_*} + f_2\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

Dérivant les deux membres de cette équation par rapport à  $z$  on obtient :

$$\frac{u_*}{\nu} f_1'\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) = \frac{1}{\delta} f_2'\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

ou :

$$\frac{u_* z}{\nu} f_1'\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) = \frac{z}{\delta} f_2'\left(\frac{z}{\delta}\right)$$

Etant fonction de variable différente, chaque membre de cette équation doit être égal à la même constante, soit  $1/k$  :

$$f_1'\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) = \frac{1}{k \left(\frac{u_* z}{\nu}\right)}$$

$$f_2'\left(\frac{z}{\delta}\right) = \frac{1}{k \left(\frac{z}{\delta}\right)}$$

$k$  est la constante de von Karman, et vaut environ 0.41 d'après les valeurs expérimentales.

On obtient donc les profils logarithmiques :

$$\frac{\bar{u}(z)}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{z u_*}{\nu} + A \quad (2.59)$$

$$\frac{\bar{u}(z) - U}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{z}{\delta} + B \quad (2.60)$$

où les valeurs expérimentales, pour une plaque lisse, conduisent à  $A = 5$  et  $B = -1$ .

Cette démarche peut paraître critiquable et de fait sa principale justification est que dans un intervalle  $[z_1 \quad z_2]$  le profil de vitesse mesuré expérimentalement est effectivement logarithmique, comme on le voit sur la figure 2.20. On note que l'approximation  $f_1(u_* z/\nu) = u_* z/\nu$  n'est valable que pour  $u_* z/\nu < 5$ , ce qui donne une idée de la faible épaisseur de la sous-couche laminaire. En ce qui concerne la loi logarithmique elle est à peu près bien vérifiée

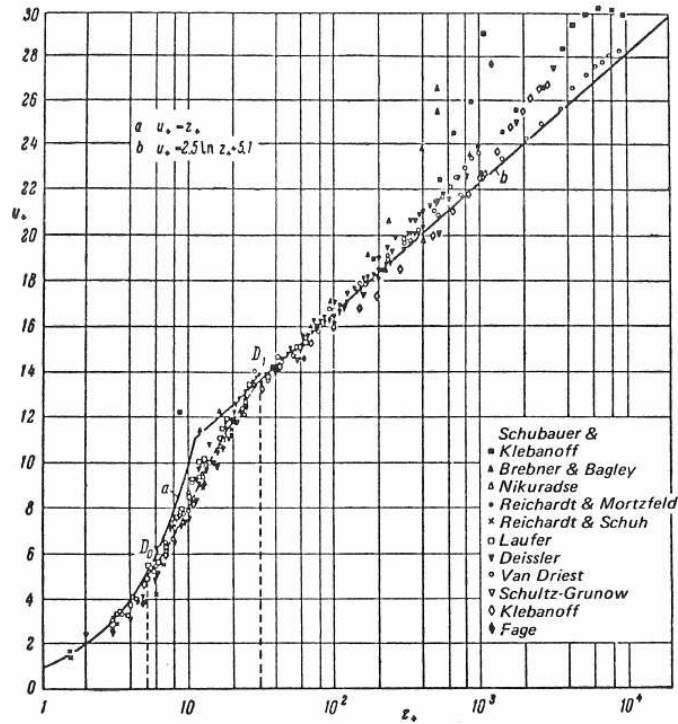


FIG. 2.20 – Couche limite turbulente sur une plaque plane. Profils de vitesse théorique et expérimentaux.  $u_+ = \bar{u}/u_*$  et  $z_+ = u_* z/\nu$ .

pour  $30 < u_* z/\nu < 300$ , ou  $0.02 \delta < z < 0.2 \delta$  (c'est à dire donc dans une faible fraction de l'épaisseur de couche limite, près de la paroi).

### Coefficient de frottement

Le coefficient local de frottement est défini par :

$$C_f = \frac{\sigma_{xz}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 2 \left( \frac{u_*}{U} \right)^2$$

Soustrayant membre à membre les deux équations (2.59) et (2.60) on obtient :

$$\frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{1}{k} \ln \frac{u_* \delta}{\nu} + A - B \quad (2.61)$$

Pour aller plus loin il est nécessaire d'établir une relation entre  $\delta$  et le nombre de Reynolds local  $U x/\nu$ . On obtient que  $\delta$  est à peu près proportionnel à  $u_* x/U$ . Enfin on passe du coefficient local  $C_f(x)$  au coefficient global  $C_F$  en intégrant  $C_f$  sur la longueur de la plaque :

$$C_F = \frac{1}{l} \int_0^l C_f(x) dx$$

On obtient ainsi le coefficient  $C_F$  sous une forme implicite similaire à celle suggérée par (2.61) :

$$\frac{1}{\sqrt{C_F}} = \alpha \ln (R_l C_F) + \beta$$

Par calage de  $\alpha$  sur des résultats expérimentaux Schoenherr a obtenu l'expression suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{C_F}} = 1.79 \ln(R_l C_F) = 4.13 \log_{10}(R_l C_F) \quad (2.62)$$

Une comparaison entre la courbe tirée de cette expression et les résultats expérimentaux est donnée sur la figure 2.21.

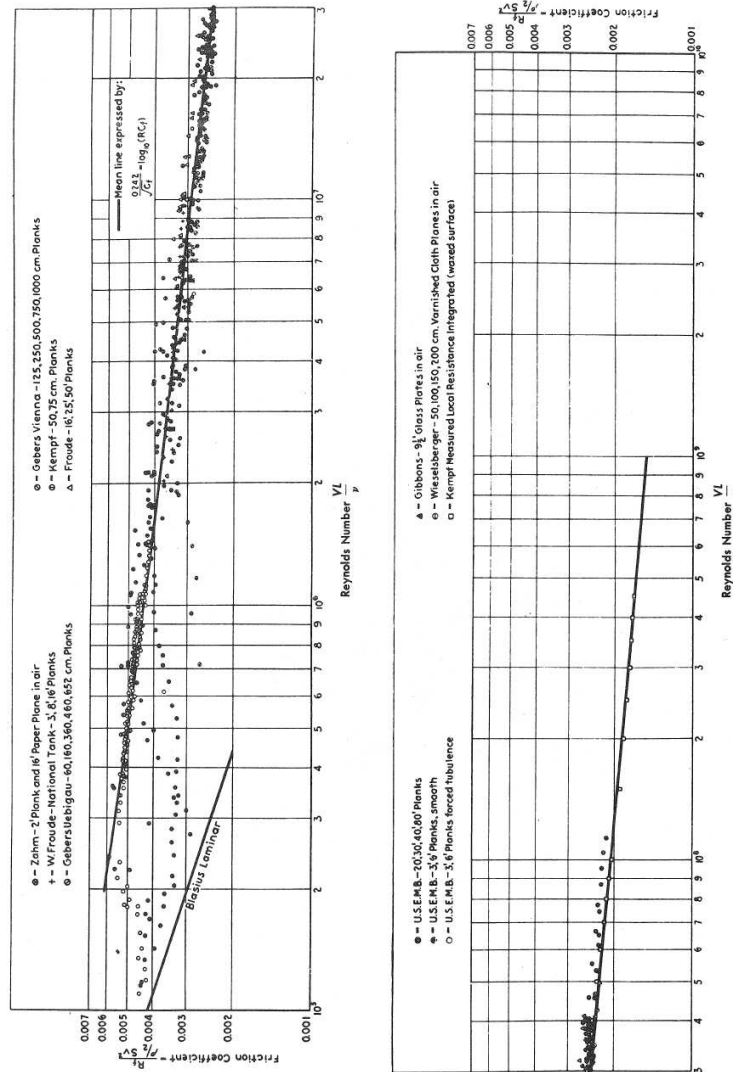


FIG. 2.21 – Coefficient de frottement de plaques planes. Mesures, Blasius et Schoenherr.

### 2.10.3 Application à la résistance à l'avancement des carènes

La résistance à l'avancement des carènes en eau calme consiste en deux composantes principales, l'une dite résistance de vagues liée à la génération de vagues et l'autre dite résistance visqueuse liée principalement au frottement fluide sur la carène. Le principe de calcul de la composante visqueuse est celui de la plaque plane équivalente, de même longueur que le navire et de même surface mouillée, ce résultat étant simplement multiplié par un facteur

de forme  $1 + k$ , où  $k$  typiquement vaut 0.2 ou 0.3. Pour des carènes opérant à des **nombre de Froude**  $U/\sqrt{gL}$  modérés (ce qui est le cas de la plupart des navires de commerce), la résistance visqueuse est prépondérante. On conçoit donc l'intérêt de formules comme la formule de Schoenherr qui permettent d'estimer facilement cette composante.

A noter que l'ITTC (International Towing Tank Conference) recommande d'utiliser, plutôt que la formule de Schoenherr, l'expression suivante :

$$C_F = \frac{0.075}{(\log_{10} R_L - 2)^2} \quad (2.63)$$

(où  $R_L = U L/\nu$ ) qui offre l'intérêt d'être explicite et qui permet un meilleur calage avec les résultats sur modèles (figure 2.22).

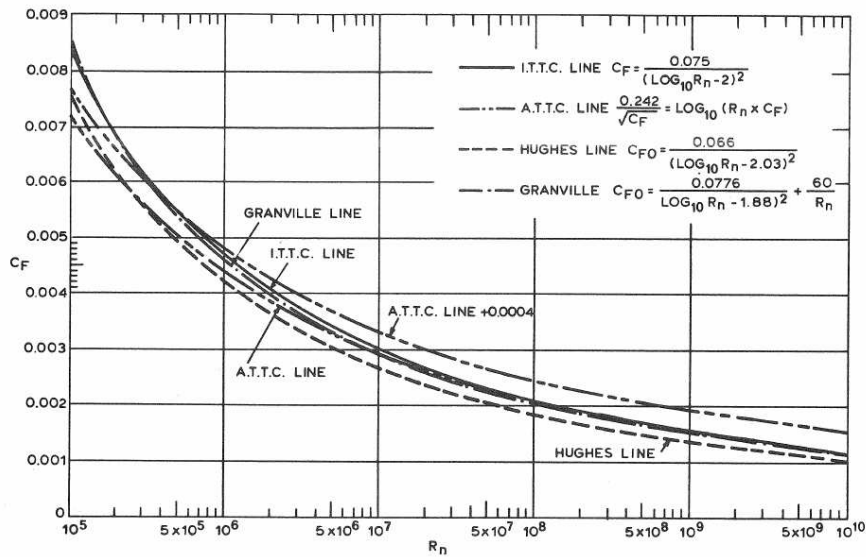


FIG. 2.22 – Coefficient de frottement de plaques planes. Régime turbulent. Lois utilisées en architecture navale.

La deuxième composante de résistance à l'avancement, dite de vagues, jusqu'à très récemment (il existe maintenant des modèles numériques fiables), était déterminée de façon expérimentale, en similitude de Froude, c'est à dire en conservant le facteur  $U/\sqrt{gL}$ , où  $U$  est la vitesse d'avance et  $L$  la longueur de la carène. Il s'ensuit que les nombres de Reynolds, au réel et en bassin, sont dans un rapport  $\lambda^{3/2}$ , où  $\lambda$  est le facteur d'échelle. La technique est alors de mesurer la résistance totale à l'avancement du modèle, de retrancher la composante visqueuse déduite de l'expression (2.63) (multipliée par  $1 + k$ ) au Reynolds du bassin, et enfin de rajouter la composante visqueuse au Reynolds du réel.

Plus précisément, on suppose que la résistance à l'avancement s'écrit, pour le prototype :

$$F = \frac{1}{2} \rho C_{\text{total}}(F_R, R_L) S U^2$$

avec

$$C_{\text{total}}(F_R, R_L) = C_{\text{vagues}}(F_R) + C_{\text{frottement}}(R_L)$$

et, pour le modèle :

$$f = \frac{1}{2} \rho C_{\text{total}}(f_r, r_l) s u^2$$

avec

$$C_{\text{total}}(f_r, r_l) = C_{\text{vagues}}(f_R) + C_{\text{frottement}}(r_l)$$

où  $S$  est la surface mouillée du prototype,  $s$  celle du modèle ( $s = \lambda^2 S$ ),  $L$  la longueur de la carène du prototype,  $l$  celle du modèle ( $l = \lambda L$ ),  $U$  la vitesse d'avance au réel,  $u$  celle du modèle,  $F_R$  et  $R_L$  les nombres de Froude et Reynolds au réel,  $f_r$  et  $r_l$  ceux du modèle.

Le choix  $u = \lambda^{1/2} U$  assure que le nombre de Froude est conservé :  $f_r = F_R$ . Le coefficient de résistance à l'avancement du prototype s'obtient alors par :

$$C_{\text{total}}(F_R, R_L) = C_{\text{total}}(f_r, r_l) - C_{\text{frottement}}(r_l) + C_{\text{frottement}}(R_L)$$

La mesure de la résistance à l'avancement  $f$  sur le modèle fournit  $C_{\text{total}}(f_r, r_l)$ . Les coefficients  $C_{\text{frottement}}(r_l)$  et  $C_{\text{frottement}}(R_L)$  s'obtenant par la formule de l'ITTC (par exemple), affectée du coefficient  $(1 + k)$  approprié, on en déduit  $C_{\text{total}}(F_R, R_L)$ .

# Chapitre 3

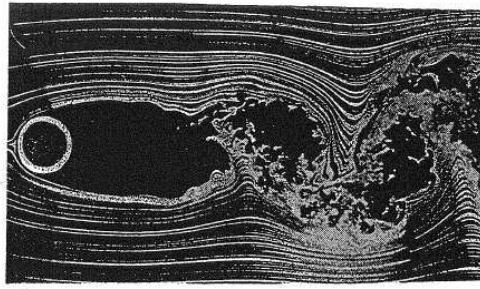
## Écoulements irrotationnels de fluides parfaits. Généralités

### 3.1 Introduction

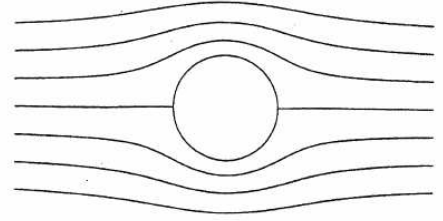
Dans les exemples traités au chapitre précédent on a vu que la viscosité jouait un rôle important au voisinage immédiat des parois solides. Dans les cas où il n'y a pas de décollement de la couche limite ces effets sont purement locaux et de peu d'incidence sur l'écoulement extérieur. S'il n'y a pas de paroi solide, par exemple dans le cas de la propagation de la houle (dans un océan infini de profondeur infinie), la viscosité moléculaire joue un rôle extrêmement ténu : la houle peut se propager sur des centaines de kilomètres sans atténuation notable.

Malheureusement, en écoulement permanent, la couche limite décolle sur la plupart des corps, avec comme conséquences la dissémination de la vorticité dans le domaine fluide, l'apparition d'un sillage et des forces de traînée bien supérieures à celles dues au frottement seul. Pour modéliser l'écoulement fluide il n'y a alors guère d'autre recours que de résoudre les équations de Navier-Stokes avec un modèle de turbulence approprié. Seules les structures très profilées : ailes d'avion, fuselages, carènes de navire, etc., échappent à ces phénomènes.

Dans la mesure où les structures auxquelles on s'intéresse ici sont des structures offshore et côtières, le plus souvent formées d'assemblages de cylindres, il semble bien qu'il n'y ait guère d'espoir d'ignorer la viscosité. C'est effectivement le cas lorsque elles sont soumises à un courant. Mais lorsque l'écoulement varie de façon cyclique, comme celui induit par la houle, et que la vitesse incidente se renverse périodiquement, les couches limites n'ont pas toujours le temps de se développer suffisamment pour décoller. Dans le cas du cylindre circulaire, on montre que le paramètre significatif est le nombre dit de Keulegan-Carpenter  $K_C = 2\pi A/D$ , où  $A$  est l'amplitude du mouvement des particules fluides et  $D$  le diamètre. A de grands nombres de Reynolds, on vérifie expérimentalement que tant que  $K_C$  est inférieur à 4, l'écoulement reste attaché au cylindre. Par exemple pour un diamètre de 15 m, l'écoulement reste attaché si l'amplitude de la houle (le demi-crête à creux) est inférieure à 10 mètres. Pour des diamètres bien inférieurs, de l'ordre du mètre, il n'est pas possible de négliger les effets de traînée. On les rattachera quand même (de façon empirique) à la cinématique de la houle incidente, établie elle par une théorie de fluide parfait.



courant seul  
 $U = \text{cte}$



écoulement oscillant faible  $K_C$   
 $U = A\omega \sin \omega t$

FIG. 3.1 – Écoulement permanent (gauche) ou oscillant (droite) sur une forme circulaire.

## 3.2 Les équations d'Euler

Ayant ainsi justifié que l'on peut, dans certains cas, négliger la viscosité, on peut procéder à l'approximation qui consiste à annuler  $\nu$  dans les équations de Navier-Stokes. On obtient alors les équations dites d'Euler :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \quad (3.1)$$

La condition de continuité, exprimant la conservation de la masse, reste inchangée :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (3.2)$$

La viscosité étant nulle il n'est plus possible d'assurer de condition d'adhérence aux parois solides. Celle-ci est maintenant remplacée par la condition de glissement :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad (3.3)$$

$\vec{V}$  : vitesse fluide

$\vec{U}$  : vitesse de la paroi.

Le fluide glisse librement sur la paroi. Des composantes des vitesses  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ , seules celles dirigées dans la direction normale à la paroi sont égales.

On peut tirer parti de l'identité :

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) + (\text{Rot } \vec{V}) \wedge \vec{V} \quad (3.4)$$

où  $\text{Rot } \vec{V}$  est le rotationnel, défini par :

$$\text{Rot } \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

pour réécrire les équations d'Euler sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\text{Rot } \vec{V}) \wedge \vec{V} = -\nabla \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (3.5)$$

d'où l'on déduit, dans le cas d'écoulements permanents ( $\partial \vec{V} / \partial t \equiv 0$ ), la première relation de Bernoulli. Pour un élément orienté de longueur  $d\vec{l}$  dirigé suivant  $\vec{V}$ , donc perpendiculaire à  $\text{Rot } \vec{V} \wedge \vec{V}$ , on a :

$$\nabla \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \cdot d\vec{l} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

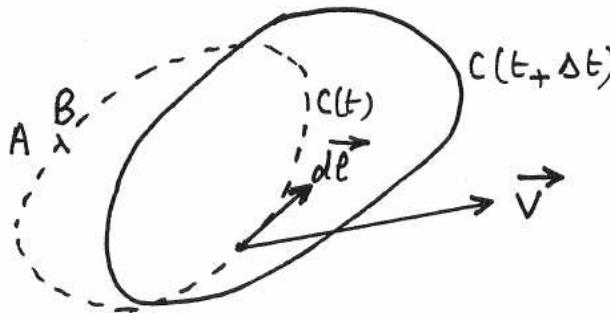
qui exprime que la charge  $V^2/2 + p/\rho + gz$  reste constante le long d'une ligne de courant.

On a supposé ici que la masse volumique  $\rho$  est constante dans le domaine fluide, hypothèse que l'on fera dans toute la suite de ce cours.

### Théorème de Kelvin

Le théorème de Kelvin exprime que, pour un fluide parfait (non visqueux), la circulation autour de tout contour fluide reste constante au cours du temps.

Soit  $C(t)$  un contour fluide (fermé) à l'instant  $t$ , formé de particules fluides que l'on suit dans leur mouvement.



Par définition la circulation  $\Gamma(t)$  le long du contour est :

$$\Gamma(t) = \int_{C(t)} \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (3.6)$$

La dérivée en temps  $d\Gamma/dt$  s'interprète de façon lagrangienne :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{C(t)} \frac{d}{dt} (\vec{V} \cdot d\vec{l})$$

soit :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{C(t)} \left[ \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} + \vec{V} \cdot d\vec{V} \right]$$

D'après l'équation d'Euler :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) = -\nabla H$$

d'où :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \int_{C(t)} \frac{\partial H}{\partial l} dl + \int_{C(t)} d \left( \frac{V^2}{2} \right) = -H + \frac{V^2}{2} \Big|_A^B$$

Le contour étant fermé les extrémités  $A$  et  $B$  coïncident et  $d\Gamma/dt \equiv 0$ . La circulation  $\Gamma$  reste constante. Physiquement cela traduit le fait que seules les forces de cisaillement (liées à la viscosité) peuvent modifier la circulation.

Si l'on fait l'hypothèse que l'écoulement est parti d'un état initial où la circulation était nulle autour de tout contour fluide, elle doit donc rester nulle aux instants ultérieurs. On en déduit que le rotationnel de la vitesse reste nul. En effet, d'après la formule de Stokes :

$$\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{Rot } \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

où  $S$  est n'importe quelle surface soutenue par  $C$  et où  $\vec{n}$  est orienté suivant la règle d'Ampère : la circulation autour d'un contour fermé est égale au flux du rotationnel.

En conclusion, si l'écoulement est irrotationnel à l'instant initial, il le reste dans son évolution ultérieure.

### 3.3 Le potentiel des vitesses

On démontre en analyse vectorielle que tout champ de vitesse  $\vec{V}$  continu et dérivable se décompose en la somme :

$$\vec{V} = \nabla\Phi + \text{Rot } \vec{B}$$

où  $\Phi$  est un scalaire et  $\vec{B}$  un vecteur à divergence nulle. Si  $\vec{V}$  est à rotationnel nul, alors on peut prendre  $\vec{B} = 0$  et :

$$\vec{V} = \nabla\Phi \tag{3.7}$$

On appelle  $\Phi = \Phi(x,y,z,t)$  le potentiel des vitesses. Mathématiquement, si  $\vec{V}(x,y,z,t)$  est connu, on peut construire  $\Phi$  au point  $P = (x,y,z)$  par :

$$\Phi(x,y,z,t) = \int_A^P \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_A^P u dx + v dy + w dz$$

où le point de départ  $A$  est arbitraire. La circulation étant nulle sur tout contour fermé passant par  $A$  et  $P$ ,  $\Phi(P)$  est indépendant du parcours d'intégration suivi de  $A$  à  $P$ .

En pratique le problème se pose toujours dans l'autre sens, à savoir d'abord déterminer le potentiel  $\Phi$  (en résolvant un problème aux limites), puis en déduire la vitesse  $\vec{V}$  et la pression  $p$ .

Le premier intérêt offert par l'introduction du concept de potentiel des vitesses est de diminuer le nombre d'inconnues du problème : de 4 (3 composantes de la vitesse + la pression) à 2 (potentiel et pression). Un deuxième avantage, comme on va le voir ci-dessous, est que le problème se formule le plus souvent de façon découplée en  $\Phi$  et  $p$ .

La condition de conservation de la masse  $\text{div } \vec{V} = 0$  devient maintenant :

$$\text{div}(\nabla\Phi) = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = \Delta\Phi = 0 \quad (3.8)$$

ou équation de Laplace.

Revenant à l'équation d'Euler (3.5), le terme en  $\text{Rot } \vec{V}$  disparaît et elle se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right)$$

soit, comme  $\vec{V} = \nabla\Phi$  :

$$\nabla \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) = 0$$

ou :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = C(t)$$

où  $C(t)$  ne dépend que du temps.  $C(t)$  peut éventuellement être incorporé dans  $\Phi$  en définissant un nouveau potentiel  $\tilde{\Phi}$  tel que :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - C(t) = \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t}$$

(On rappelle que  $\Phi$  n'a de signification physique que par son gradient).

On obtient ainsi la relation dite de Bernoulli-Lagrange :

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla\Phi)^2 - \rho g z \quad (3.9)$$

$p_0$  étant une pression de référence (par exemple telle que la pression à la surface libre soit égale à la pression atmosphérique).

Par rapport à l'autre équation de Bernoulli établie ci-dessus pour un écoulement rotationnel le gain est significatif : cette nouvelle relation est valable pour un écoulement instationnaire, et elle est applicable dans tout le domaine fluide.

### 3.4 Exemples de résolution du problème aux limites

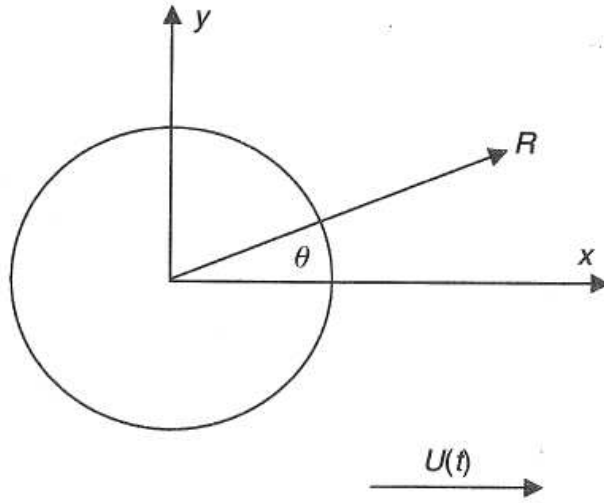
Lorsque la géométrie du problème est rectangulaire (dans un certain système de coordonnées), il est en général aisé de résoudre le problème aux limites vérifié par le potentiel  $\Phi$ .

On va illustrer cette proposition par trois exemples.

[Dans le cas général d'une géométrie quelconque, une résolution numérique est nécessaire, basée par exemple sur la méthode de l'équation intégrale ou sur celle des éléments finis].

### 3.4.1 Cylindre circulaire dans un courant

Soit un cylindre centré à l'origine de rayon  $a$ , soumis à un écoulement uniforme de vitesse  $U$  suivant l'axe  $x$ . Dans un premier temps on suppose que  $U$  ne varie pas en temps, bien que l'on ait argumenté qu'en ce cas l'écoulement n'a rien de potentiel (il y a quand même un intérêt à considérer le problème, qui apparaîtra au paragraphe consacré aux transformations conformes).



On pose  $\Phi = U x + \varphi$ ,  $\Phi$  étant le potentiel total de l'écoulement, et  $\varphi$  celui de la perturbation due au cylindre. Le problème aux limites en  $\varphi$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 && \text{dans le fluide} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= -\frac{\partial}{\partial n}(U x) && x^2 + y^2 = a^2 \\ \nabla\varphi &\rightarrow 0 && x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

où l'on sera mieux à même de préciser, plus loin, comment  $\varphi$  décroît quand on s'éloigne à l'infini.

Manifestement il paraît plus approprié de passer en coordonnées polaires  $(R, \theta)$  dans lesquelles la géométrie est bien rectangulaire puisque  $\theta$  varie de  $0$  à  $2\pi$  et  $R$  de  $a$  à l'infini. Le problème aux limites se transforme alors en :

$$\begin{aligned} \varphi_{RR} + \frac{1}{R} \varphi_R + \frac{1}{R^2} \varphi_{\theta\theta} &= 0 && \text{dans le fluide} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial R} &= -U \cos \theta && R = a \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\nabla\varphi \rightarrow 0 \qquad R \rightarrow \infty$$

La forme de la condition de glissement suggère de rechercher  $\varphi$  sous la forme :

$$\varphi(R,\theta) = f(R) \cos \theta$$

L'introduction de cette expression dans l'équation de Laplace conduit à :

$$R^2 f'' + R f' - f = 0$$

qui admet pour solutions  $R$  et  $R^{-1}$ . La première est à rejeter puisque ne décroissant pas à l'infini. On choisit donc  $\varphi = \alpha R^{-1} \cos \theta$ . La condition de glissement permet de déterminer  $\alpha$  et on obtient :

$$\Phi = U \left( R + \frac{a^2}{R} \right) \cos \theta \qquad (3.11)$$

On n'a en fait trouvé qu'une solution particulière du problème. La solution générale s'écrit :

$$\Phi = U \left( R + \frac{a^2}{R} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \qquad (3.12)$$

où  $\Gamma$  est une circulation autour du profil arbitraire. Pour déterminer la solution de manière unique il faut donc se donner une condition supplémentaire sur la circulation. C'est ce qu'on fera quand on étudiera les profils portants, suivant la technique de transformation conforme à partir d'un cercle ; la circulation est alors ajustée de façon à générer une vitesse finie au bord de fuite.

Le traitement de ce problème appelle plusieurs commentaires :

1. La circulation autour de toute courbe fermée contenant le cylindre est non nulle, mais l'écoulement est bien irrotationnel. Il n'y a pas contradiction : le rotationnel est concentré au centre du cylindre, en dehors du domaine fluide.

2. Le théorème de Kelvin, pour être appliqué, demande que l'on spécifie des conditions initiales. Si l'on part de l'état de repos et qu'on augmente progressivement la vitesse du courant, la circulation reste nulle, et notre solution est bien définie de façon unique. C'est la recherche directe d'une solution permanente qui fait perdre l'unicité. (Dans le cas des profils portants, l'établissement d'une circulation non nulle est dû physiquement à la viscosité.)

3. Le problème aux limites général écrit sous la forme de Laplacien nul dans le domaine fluide et conditions de Neumann aux frontières n'admet pas toujours une solution unique. Mathématiquement on démontre que l'unicité nécessite que le domaine fluide soit simplement connexe, c'est à dire que toute courbe fermée puisse se déformer de façon continue en un point (de façon que la circulation soit nulle sur tout contour fermé). En deux dimensions, en la présence d'un obstacle, cette condition n'est jamais remplie, et la solution est toujours définie à une circulation près (ou plusieurs, s'il y a plusieurs corps). En trois dimensions elle ne l'est pas forcément ; par exemple le domaine fluide extérieur à un tore (ou une plate-forme semi-submersible) n'est pas simplement connexe.

## Efforts sur le cylindre

On les obtient par intégration de la pression qui se réduit ici à :

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho (\nabla\Phi)^2$$

soit :

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho \left( -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2$$

Les efforts suivant  $x$  et  $y$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \left( -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} a d\theta$$

L'intégration de 0 à  $2\pi$  des termes  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $\sin \theta \cos \theta$ ,  $\sin^2 \theta \cos \theta$ ,  $\sin^2 \theta \sin \theta$  donnant zéro, on obtient :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho U \Gamma \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

On retrouve donc le paradoxe de d'Alembert, à savoir que les efforts sont nuls dans la direction de l'écoulement. Par contre la composante transverse est non nulle. Cette **portance** est liée à la différence de vitesse de l'écoulement au dessus et au dessous du cylindre, lorsque la circulation est non nulle.

### Cas d'une vitesse incidente $U(t)$ fluctuant en temps

Le potentiel de l'écoulement s'écrit maintenant :

$$\Phi(R, \theta, t) = U(t) \left( R + \frac{a^2}{R} \right) \cos \theta$$

(on suppose nulle la circulation)

si bien qu'il se rajoute à la pression le terme instationnaire :

$$p_i = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\rho \dot{U}(t) \left( R + \frac{a^2}{R} \right) \cos \theta$$

où  $\dot{U} = dU/dt$ .

La contribution de  $p_i$  aux efforts est donc :

$$\begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix} = \rho \int_0^{2\pi} 2 \dot{U}(t) a \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} a d\theta$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \rho \pi a^2 \dot{U}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc un effort dit d'**inertie**, égal ici (pour le cercle) à deux fois l'accélération de l'écoulement multipliée par la masse du fluide déplacé.

### 3.4.2 Génération de la houle par un batteur plan

La résolution de ce problème risque de paraître longue et fastidieuse. En fait elle constitue une excellente introduction à celle de problèmes plus complexes qui seront abordés dans la deuxième partie de ce cours (*Hydrodynamique des structures offshore*).

On considère un canal bidimensionnel semi-infini, de profondeur constante  $H$ , et dont la paroi de gauche effectue des oscillations sinusoïdales d'amplitude  $x_0$  et de pulsation  $\omega$  :

$$X(t) = x_0 \sin \omega t$$

On veut déterminer les caractéristiques des ondes produites (amplitude, longueur d'onde) et, par exemple, les efforts hydrodynamiques subis par le batteur. On suppose que le batteur a été mis en route depuis un temps suffisamment long pour qu'un régime établi ait été atteint.

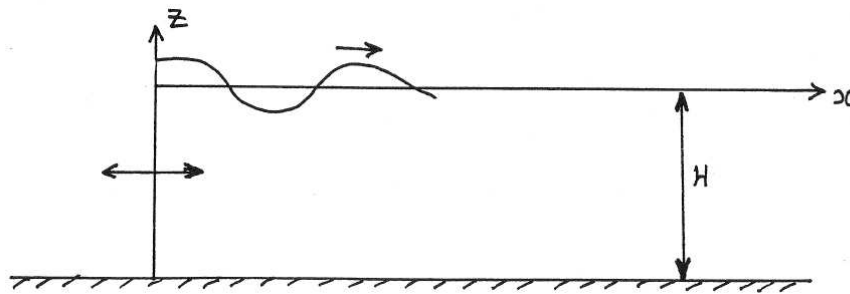


FIG. 3.2 – Géométrie.

#### Conditions aux limites à la surface libre

Soit  $z = \eta(x,t)$  l'élévation de surface libre. C'est une inconnue du problème. La surface libre étant une frontière matérielle du domaine fluide, la condition de glissement (3.3) s'y applique. Par ailleurs il faut écrire que la pression y est constante, égale à la pression atmosphérique. Ces deux conditions sont connues sous le nom respectivement de **condition cinématique** et **condition dynamique**.

- Condition cinématique :

Pour l'expliciter il est plus commode de décrire la position de la surface libre par  $S(x,z,t) = 0$ , où  $S = z - \eta(x,t)$ . A un instant  $t$  donné, tout petit déplacement  $(dx, dz)$  sur la surface libre satisfait  $S_x dx + S_z dz = 0$ , donc  $\nabla S = (S_x, S_z)$  est colinéaire au vecteur normal. Par ailleurs un point  $(x(t), z(t))$  qui reste sur la surface libre au cours du temps vérifie :

$$S_x \frac{dx}{dt} + S_z \frac{dz}{dt} + S_t = 0$$

soit :

$$\nabla S \cdot \vec{U} = -S_t$$

Donc  $\nabla S \cdot \vec{U}$  est, au facteur  $\|\nabla S\|$  près, la projection de  $\vec{U}$  dans la direction normale, et la condition de glissement  $\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n}$  s'écrit :

$$\nabla S \cdot \nabla \Phi + S_t = \frac{dS}{dt} = 0$$

soit, comme  $S_x = -\eta_x$ ,  $S_z = 1$  et  $S_t = -\eta_t$  :

$$\Phi_z - \Phi_x \eta_x - \eta_t = 0 \quad \text{pour } z = \eta(x,t) \quad (3.14)$$

• Condition dynamique :

Il suffit d'appliquer la relation de Bernoulli :

$$g z + \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = 0 \quad \text{pour } z = \eta(x,t) \quad (3.15)$$

On suppose petits les pentes et déplacements de la surface libre, si bien qu'il est légitime de linéariser ces équations en négligeant les termes quadratiques, et de les afficher sur la position moyenne  $z = 0$ . On obtient alors :

pour la condition cinématique :

$$\Phi_z - \eta_t = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad (3.16)$$

pour la condition dynamique :

$$g \eta + \Phi_t = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad (3.17)$$

Eliminant  $\eta$  on obtient l'équation :

$$g \Phi_z + \Phi_{tt} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad (3.18)$$

Similairement on simplifie la condition de glissement sur le batteur en l'affichant, non pas sur sa position instantanée  $x = X(t)$ , mais sur sa position moyenne  $x = 0$  :

$$\Phi_x(0,z,t) = x_0 \omega \cos \omega t$$

De ces simplifications il résulte que le domaine fluide "de travail" est le domaine fluide moyen, ou au repos,  $x \geq 0$   $-H \leq z \leq 0$ , et que toutes les équations du problème sont linéaires. Il s'ensuit que le potentiel  $\Phi$  varie périodiquement en temps à la pulsation  $\omega$ . Utilisant une technique qui sera largement employée par la suite (et qui n'a d'autre intérêt que d'alléger les écritures), on introduit le potentiel complexe  $\varphi(x,z)$  tel que :

$$\Phi(x,z,t) = \Re \{ \varphi(x,z) e^{-i\omega t} \} \quad (3.19)$$

$\varphi$  est solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 & x \geq 0 & \quad -H \leq z \leq 0 \\ \varphi_z &= 0 & x \geq 0 & \quad z = -H \\ \varphi_x &= x_0 \omega & x = 0 & \quad -H \leq z \leq 0 \\ g \varphi_z - \omega^2 \varphi &= 0 & x \geq 0 & \quad z = 0 \end{aligned}$$

On verra plus loin qu'il est nécessaire de se donner des conditions supplémentaires pour  $x \rightarrow \infty$ , basées sur des considérations physiques, pour déterminer une solution unique. Ce problème ne se

poserait pas si l'on travaillait dans le domaine temporel, en mettant en route le batteur à l'instant  $t = 0$  (mais la résolution est alors plus difficile).

Le domaine fluide étant rectangulaire en  $(x, z)$ , on recherche des solutions élémentaires à variables séparées, de la forme  $f(x) h(z)$ , qui vérifient un maximum des équations du problème. Introduisant  $\varphi(x, z) = f(x) h(z)$  dans l'équation de Laplace on obtient :

$$f'' h + f h'' = 0$$

ou, si  $f$  et  $h$  sont non nuls :

$$\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} = 0$$

$f''/f$  est une fonction de  $x$  seul, alors que  $h''/h$  est une fonction de  $z$ . Donc  $f''/f$  et  $-h''/h$  sont égaux à la même constante, soit  $C$ . Il convient de distinguer les cas où  $C$  est positif, nul ou négatif.

- $C = k^2$

On a alors :

$$f'' - k^2 f = 0 \quad h'' + k^2 h = 0$$

Les solutions en  $f$  sont  $\exp(kx)$  et  $\exp(-kx)$ . Celles en  $z$  :  $\cos kz$  et  $\sin kz$ . Des deux solutions possibles en  $x$  la première est à éliminer car elle conduit à un potentiel qui tend vers l'infini pour  $x \rightarrow \infty$ . Celles associées en  $z$  sont en  $\cos k(z + H)$  pour que la condition de glissement sur le fond soit automatiquement vérifiée. Enfin la condition de surface libre  $g \varphi_z - \omega^2 \varphi = 0$  donne :

$$-k \sin kH - \omega^2 \cos kH = 0$$

ou :

$$\omega^2 = -g k \operatorname{tg} kH \tag{3.20}$$

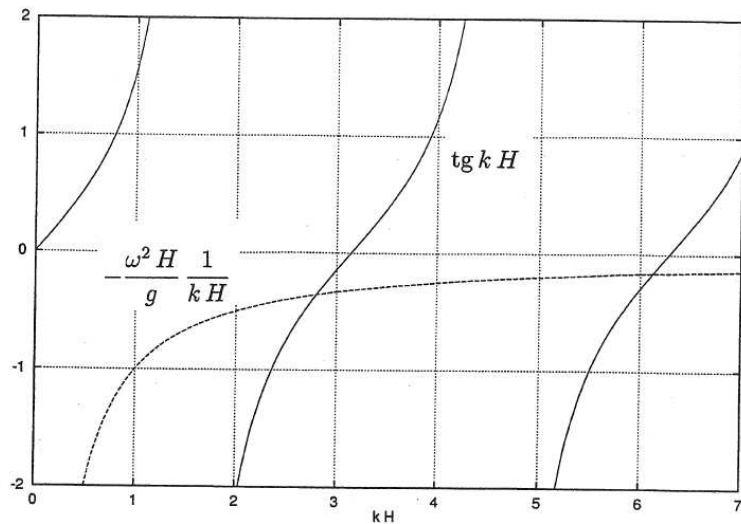


FIG. 3.3 – Résolution graphique de  $\omega^2 = -g k \operatorname{tg} kH$ .

Les valeurs de  $k$  qui nous intéressent sont celles qui vérifient cette équation. Pour vérifier s'il existe des solutions, il est plus commode de l'écrire sous la forme :

$$\operatorname{tg} kH = -\frac{A}{kH}$$

où  $A = \omega^2 H/g$ . Les solutions sont donc les points d'intersection de l'hyperbole  $y = -A/x$  avec la courbe  $y = \operatorname{tg} x$  (figure 3.3). Il existe une suite discrète de solutions, soit  $k_n, (n = 1, \dots, \infty)$ . De façon asymptotique, lorsque  $n$  augmente,  $k_n \simeq n\pi/H$ .

•  $C = 0$

$f$  et  $h$  sont alors des fonctions linéaires de  $x$  et  $z$  (respectivement), ce qui donne  $\varphi = a x z + b x + c z + d$ . Seul  $b x$  permet d'assurer la condition de glissement sur le fond mais alors la condition de surface libre ne peut être remplie. Donc ce cas ne fournit pas de solution.

•  $C = -k^2$

On a alors :

$$f'' + k^2 f = 0 \qquad h'' - k^2 h = 0$$

Les solutions en  $x$  sont  $\cos kx$  et  $\sin kx$ . Pour faire le choix il faut remarquer que  $\Re\{\cos kx \times \exp(-i\omega t)\} = \cos kx \cos \omega t$  ne décrit pas une onde progressive mais un clapotis (de même pour  $\Re\{\sin kx \exp(-i\omega t)\}$ ). Ce résultat est contraire à l'expérience visuelle, et à la physique qui veut que l'énergie transmise par le batteur au fluide se propage vers les  $x$  positifs. Le remède est de regrouper  $\cos kx$  et  $\sin kx$  en  $\exp(ikx)$ . On a alors  $\Re\{\exp(ikx - i\omega t)\} = \cos(kx - \omega t)$  qui représente bien une onde qui se propage de gauche à droite.

Comme dans le cas précédent on associe les solutions en  $z$  en  $\operatorname{ch} k(z + H)$  de façon que la condition de glissement sur le fond soit satisfaite. La condition de surface libre donne cette fois :

$$\omega^2 = g k \operatorname{th} kH \tag{3.21}$$

dont on peut également obtenir la solution de manière graphique (figure 3.4), et qui admet une solution unique, soit  $k_0$ .

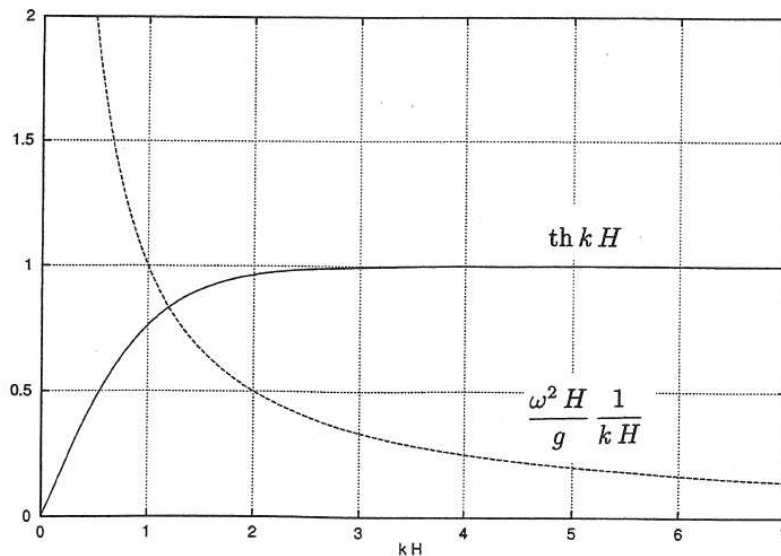


FIG. 3.4 – Résolution graphique de  $\omega^2 = g k \operatorname{th} kH$ .

On a donc identifié une suite de fonctions de  $x$  et  $z$ :  $f_n(x) g_n(z), (n = 0, 1, \dots, \infty)$  qui satisfont toutes les équations du problème hormis la condition de glissement sur le batteur. Pour la satisfaire on les regroupe sous la forme :

$$\varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n f_n(x) g_n(z) = A_0 \operatorname{ch} k_0(z + H) e^{ik_0x} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n(z + H) e^{-k_nx}$$

On admettra que les fonctions de  $z$ :  $[\operatorname{ch} k_0(z + H), \cos k_n(z + H), (n = 1, \infty)]$  forment une base complète sur l'intervalle  $[-H, 0]$ . Par ailleurs on peut facilement vérifier qu'elles y sont orthogonales.

Ecrivant alors la condition de glissement en  $x = 0$ :

$$ik_0 A_0 \operatorname{ch} k_0(z + H) - \sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n \cos k_n(z + H) = x_0 \omega \quad (3.22)$$

on constate qu'il suffit de multiplier les deux membres de cette équation par  $\operatorname{ch} k_0(z + H)$  et de les intégrer en  $z$  de  $-H$  à  $0$  pour obtenir le coefficient  $A_0$ , les autres termes disparaissant du fait de l'orthogonalité en  $z$ . On obtient ainsi :

$$A_0 = -\frac{i}{k_0} \frac{4 \operatorname{sh} k_0 H}{2 k_0 H + \operatorname{sh} 2 k_0 H} x_0 \omega$$

On peut de même déterminer les autres coefficients  $A_n$  en multipliant à gauche et à droite par  $\cos k_n(z + H)$  et en intégrant de  $-H$  à  $0$ . Si l'on s'intéresse à la houle générée loin du batteur, la connaissance des coefficients  $A_n$  pour  $n \geq 1$  n'est pas nécessaire puisque la contribution des termes associés décroît de façon exponentielle avec  $x$ . Ces termes ne sont sensibles qu'au voisinage immédiat du batteur, où ils permettent d'assurer la condition de glissement. On les qualifie de **modes évanescents**. Ils entraînent des efforts d'inertie sur le batteur (en opposition de phase avec l'accélération) alors que le terme associé à  $A_0$  donne un effort en opposition de phase avec la vitesse et représente donc une dissipation d'énergie.

Loin du batteur l'élévation de surface libre est donnée par :

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \Phi_t(x, 0, t)$$

(d'après l'équation (3.17)), soit :

$$\eta(x, t) = \Re \left\{ \frac{i\omega}{g} A_0 \operatorname{ch} k_0 H e^{i(k_0x - \omega t)} \right\}$$

En remplaçant  $A_0$  par sa valeur on obtient :

$$\eta(x, t) = \frac{4 \operatorname{sh}^2 k_0 H}{2 k_0 H + \operatorname{sh} 2 k_0 H} x_0 \cos(k_0x - \omega t)$$

La surface libre est donc une sinusoïde, de longueur d'onde  $2\pi/k_0$ , où  $k_0$  est donné par la relation (3.21), et dont l'amplitude  $A$  est égale à celle du mouvement du batteur, multipliée par la fonction de transfert :

$$\frac{A}{x_0} = \frac{4 \operatorname{sh}^2 k_0 H}{2 k_0 H + \operatorname{sh} 2 k_0 H} \quad (3.23)$$

Quand  $k_0H$  est grand devant 1 (en pratique  $k_0H > 3$ , soit une profondeur supérieure à une demi-longueur d'onde), ce rapport est égal à 2. L'amplitude de la houle générée est donc double de celle du mouvement du batteur. A l'autre extrême, lorsque  $k_0H$  tend vers zéro, la fonction de transfert devient égale à  $k_0H$ .

On peut traiter de la même manière le cas d'un batteur "volet", articulé au niveau du fond. Il suffit alors de remplacer le second membre de l'équation (3.22) par  $x_0 \omega (z + H)/H$ ,  $x_0$  étant alors l'amplitude du mouvement au niveau de la surface libre.

La figure 3.5 ci-dessous illustre les fonctions de transfert  $A/x_0$  des batteurs "piston" et "volet".

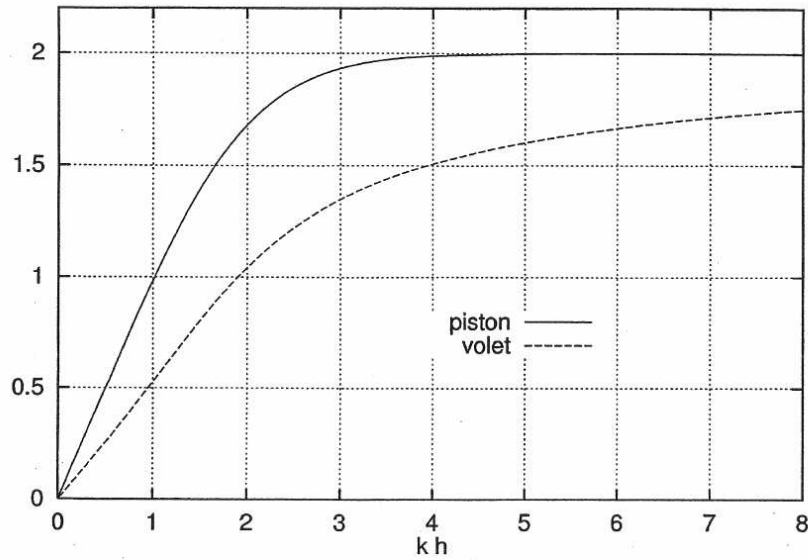


FIG. 3.5 – Fonctions de transfert des batteurs à houle de type "piston" et "volet".

### 3.4.3 Implosion d'une cavité sphérique (équation de Rayleigh-Plesset)

Dans ce troisième exemple, tridimensionnel, on considère à l'instant initial une cavité sphérique de rayon  $a_0$  dans un fluide illimité au repos et à la pression  $p_\infty$ . La pression à l'intérieur de la cavité est nulle et reste nulle au cours du temps. On suppose que la cavité reste sphérique au cours de l'implosion et on néglige la tension superficielle.

Soit  $a(t)$  le rayon de la bulle au cours du temps.  $a(0) = a_0$ . Le potentiel des vitesses  $\Phi(x,y,z,t)$  vérifie le problème aux limites :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 && \text{dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \frac{da}{dt} && \text{sur la cavité} \\ \nabla\Phi &\rightarrow 0 && x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Il est évidemment adapté de se placer en coordonnées sphériques  $(R,\theta,\varphi)$ , où :

$$x = R \sin \theta \cos \varphi \qquad y = R \sin \theta \sin \varphi \qquad z = R \cos \theta$$

L'expression du Laplacien est alors :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \quad (3.24)$$

La cavité restant sphérique au cours du temps, le potentiel  $\Phi$  ne dépend que de  $R$  (et de  $t$ ), et vérifie donc :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) = 0$$

soit :

$$R^2 \frac{\partial\Phi}{\partial R} = A(t)$$

et :

$$\Phi(R,t) = -\frac{A(t)}{R} + B(t)$$

où l'on peut supposer  $B(t) \equiv 0$  sous réserve d'assurer que la pression est égale à  $p_\infty$  à l'infini.

La condition de glissement à la paroi de la cavité :

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right|_{R=a(t)} = \frac{da}{dt} = \dot{a}$$

donne :

$$\frac{A(t)}{a^2} = \dot{a}$$

Donc :

$$\Phi(R,t) = -\frac{\dot{a} a^2}{R}$$

La pression dans le fluide s'obtient par la relation de Bernoulli :

$$p = p_\infty - \rho \Phi_t - \frac{1}{2} \rho (\nabla\Phi)^2$$

ce qui donne :

$$p = p_\infty + \rho \frac{2a \dot{a}^2 + a^2 \ddot{a}}{R} - \frac{1}{2} \rho \frac{a^4 \dot{a}^2}{R^4}$$

Sur la cavité  $R = a(t)$  la pression est égale à la pression intérieure, donc nulle. On obtient ainsi l'équation d'évolution pour  $a(t)$  :

$$a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 = -\frac{p_\infty}{\rho} \quad (3.25)$$

Pour intégrer cette équation on multiplie les deux membres par  $2 a^2 \dot{a}$  :

$$2 a^3 \dot{a} \ddot{a} + 3 a^2 \dot{a}^3 = -2 a^2 \dot{a} \frac{p_\infty}{\rho} \quad (3.26)$$

(équation qu'on peut retrouver en écrivant que la puissance fournie par les forces de pression à l'infini est égale à la variation temporelle d'énergie cinétique dans le fluide).

L'équation (3.26) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(a^3 \dot{a}^2) = -\frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} \frac{d}{dt}(a^3)$$

soit, par intégration, en tenant compte de ce que  $\dot{a}(0) = 0$  :

$$a^3 \dot{a}^2 = \frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} (a_0^3 - a^3)$$

et :

$$\frac{da}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_\infty}{\rho} \left( \frac{a_0^3}{a^3} - 1 \right)}$$

Le temps d'implosion est donc :

$$T = -\sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{p_\infty}} \int_{a_0}^0 \frac{da}{\sqrt{\frac{a_0^3}{a^3} - 1}} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho}{p_\infty}} \int_0^1 \frac{a_0 du}{\sqrt{\frac{1}{u^3} - 1}} \quad (3.27)$$

L'évaluation numérique de l'intégrale donne :

$$T = 0.915 a_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}} \quad (3.28)$$

Par exemple, pour  $p_\infty = 1$  bar et  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, on trouve qu'une cavité de rayon initial 5 mm s'effondre en environ 0.5 milli-seconde. Ce résultat est assez bien vérifié par les expériences menées sur les bulles de cavitation.

# Chapitre 4

## Écoulements irrotationnels de fluides parfaits. Écoulements plans

Toujours dans l'hypothèse d'écoulements irrotationnels de fluides parfaits, on se restreint dans ce chapitre aux écoulements plans. Comme on va le voir, l'introduction du concept de potentiel complexe permet de résoudre simplement une vaste variété de problèmes.

### 4.1 La fonction de courant

On a, au chapitre précédent, introduit le concept de potentiel des vitesses, basé sur l'hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement qui se trouve ainsi automatiquement satisfaite. On peut de même assurer a priori le respect de la condition de conservation de la masse  $\text{div } \vec{V} = 0$  en écrivant que la vitesse fluide  $\vec{V}$  est le rotationnel d'un vecteur  $\vec{W}$  :

$$\vec{V} = \text{Rot } \vec{W}$$

En trois dimensions il y a peu à gagner à procéder ainsi puisqu'on remplace un vecteur à 3 composantes ( $\vec{V}$ ) par un autre vecteur à 3 composantes ( $\vec{W}$ ), et le nombre d'inconnues du problème reste le même. Par contre si l'écoulement est confiné dans le plan  $xy$ ,  $\vec{W}$  se réduit à une seule composante suivant  $z$ , soit  $\Psi$  et :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Psi_y \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\Psi_x \quad (4.1)$$

$\Psi(x,y,t)$  est appelé fonction de courant.

La condition d'irrotationnalité entraîne alors :

$$u_y - v_x = \Psi_{yy} + \Psi_{xx} = \Delta \Psi = 0 \quad (4.2)$$

Donc la fonction de courant  $\Psi$ , comme le potentiel  $\Phi$ , vérifie la condition de Laplace<sup>1</sup>

---

1. Notons que la fonction de courant, basée seulement sur l'hypothèse d'incompressibilité, peut être utilisée pour l'étude d'écoulements rotationnels de fluides visqueux. Par exemple il est classique, en 2D, de traiter les équations de Navier-Stokes en prenant comme inconnues  $\Psi$ , fonction de courant, et  $\omega$ , rotationnel (ou vorticité), qui vérifient alors :

$$\Delta \Psi = -\omega \quad \frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega$$

Inversement, connaissant  $u$  et  $v$ , on peut obtenir  $\Psi$  au point  $P(x,y)$  par :

$$\Psi(x,y,t) - \Psi(A,t) = \int_A^P u \, dy - v \, dx = \int_A^P \vec{V} \cdot \vec{n} \, dl$$

qui est indépendant du parcours suivi, en vertu de l'hypothèse d'incompressibilité.  $\Psi(P) - \Psi(A)$  est donc égal au flux du vecteur vitesse sur le parcours  $AP$ . S'il existe une même ligne de courant passant par  $A$  et  $P$ , alors  $\Psi(P) = \Psi(A)$  : la fonction de courant reste constante sur une ligne de courant.

Sur un obstacle fixe, la fonction de courant  $\Psi$  satisfait donc une condition de Dirichlet :  $\Psi = \text{cte}$ . Sur un obstacle en mouvement la condition de glissement s'écrit :  $\partial\Psi/\partial s = \vec{U} \cdot \vec{n}$ .

Comme exemple d'application, on peut traiter à nouveau le cas d'un cylindre circulaire placé dans un courant de vitesse  $U$  suivant  $x$ . En l'absence du cylindre la fonction de courant est simplement :

$$\Psi_I = U y$$

On se place à nouveau en coordonnées polaires  $(R,\theta)$  et on obtient alors facilement que la fonction de courant, avec cylindre, est donnée par :

$$\Psi(R,\theta) = U \left( R - \frac{a^2}{R} \right) \sin \theta$$

de telle façon que  $\Psi = 0$  sur le cylindre.

## 4.2 Le potentiel complexe

Soit  $f(z)$  une fonction complexe de la variable complexe  $z = x + i y$ . On suppose que  $f$  est analytique dans un certain domaine, c'est à dire que la dérivée  $f'(z)$  existe et que, localement :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) (z - z_0) + O(z - z_0)^2 \quad (4.3)$$

quelle que soit l'orientation du vecteur  $z - z_0$ .

On peut séparer partie réelle et partie imaginaire et écrire  $f$  sous la forme :

$$f(z) = P(x,y) + i Q(x,y) \quad (4.4)$$

L'application de (4.3) à un petit déplacement  $\Delta x$  suivant  $x$  au voisinage du point  $z_0$  conduit à :

$$f(z_0 + \Delta x) = f(z_0) + \Delta x f'(z_0) = P(x_0, y_0) + i Q(x_0, y_0) + \Delta x P_x(x_0, y_0) + i \Delta x Q_x(x_0, y_0) \quad (4.5)$$

et de même, pour un petit déplacement  $\Delta y$  suivant  $y$  :

$$f(z_0 + i \Delta y) = f(z_0) + i \Delta y f'(z_0) = P(x_0, y_0) + i Q(x_0, y_0) + \Delta y P_y(x_0, y_0) + i \Delta y Q_y(x_0, y_0) \quad (4.6)$$

La compatibilité de (4.5) et (4.6) entraîne :

$$i (P_x + i Q_x) = P_y + i Q_y$$

soit :

$$P_x = Q_y \quad Q_x = -P_y \quad (4.7)$$

$P$  et  $Q$  sont alors dits vérifier les conditions de Cauchy-Riemann. Inversement, si deux fonctions  $P(x,y)$  et  $Q(x,y)$  satisfont les conditions de Cauchy-Riemann (4.7), alors  $f = P(x,y) + i Q(x,y)$  est une fonction analytique de  $z$  (les conditions de Cauchy-Riemann sont en fait équivalentes à  $\partial f / \partial z^* = 0$ , où  $z^*$  est le nombre complexe conjugué  $x - i y$ ).

Des relations (4.7) on tire, par différentiation :

$$P_{xx} = Q_{xy} = Q_{yx} = -P_{yy}$$

et donc :

$$P_{xx} + P_{yy} = 0$$

On montre de même que  $Q$  est également à Laplacien nul. Si on assimile  $P$  et  $Q$  à (respectivement)  $\Phi$  et  $\Psi$ , potentiel et fonction de courant, alors  $f(z) = P + i Q$  décrit un écoulement de vitesse  $(u,v)$  donnée par :

$$u - i v = f'(z) \quad (4.8)$$

de potentiel  $\Phi(x,y) = \Re\{f\}$  et de fonction de courant  $\Psi(x,y) = \Im\{f\}$ .

Toute fonction  $f(z)$  analytique de la variable complexe  $z$  représente donc un écoulement potentiel. On va considérer quelques exemples.

- $f(z) = C z$

La vitesse complexe  $u - i v$  est alors égale à  $C$ . On a donc un écoulement uniforme de composantes  $\Re\{C\}$  suivant  $x$  et  $-\Im\{C\}$  suivant  $y$ .

- $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$  ( $Q$  réel positif) (figure 4.1 gauche)

On a alors, séparant partie réelle et imaginaire :

$$\Phi + i \Psi = \frac{Q}{2\pi} \ln R + i \frac{Q}{2\pi} \theta$$

où  $z = R e^{i\theta}$ .

Les lignes de courant  $\Psi = \text{cte}$  sont les droites passant par l'origine. L'écoulement est donc radial, de vitesse  $\partial\Phi/\partial R = Q/2\pi R$ , de telle façon que le débit  $Q$  à travers tout cercle centré à l'origine se conserve. Il s'agit donc de l'écoulement engendré par une **source** ponctuelle de débit  $Q$  centrée à l'origine (pour  $Q < 0$  on a un **puits**).

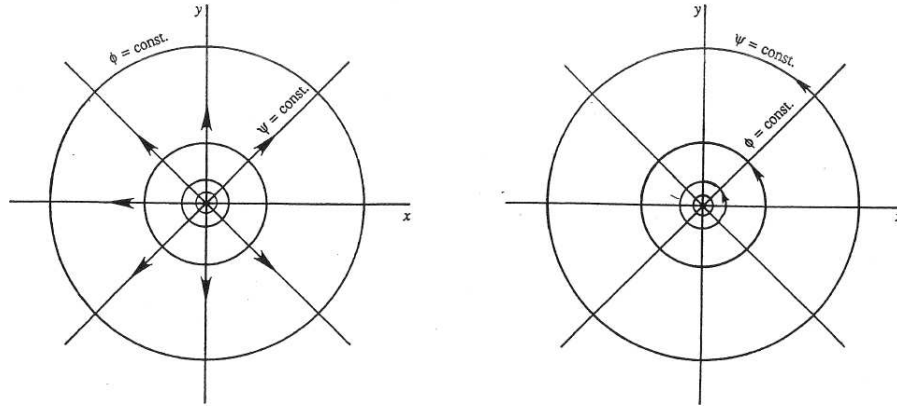


FIG. 4.1 – *Écoulement généré par une source (gauche) ou un tourbillon (droite) à l'origine.*

- $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0)$

Idem, la source (ou le puits) étant centrée en  $z_0$ .

- $f(z) = \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln z$  ( $\Gamma$  réel) (figure 4.1 droite)

On a cette fois :

$$\Phi + i \Psi = \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln R + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Les lignes de courant sont les cercles centrés à l'origine. La vitesse le long de ces cercles est égale à  $\Gamma/2\pi R$ , si bien que la circulation est égale à  $\Gamma$ . L'écoulement est celui engendré par une singularité de type **vortex** (ou **tourbillon**) à l'origine.

- $f(z) = C z + \frac{Q}{2\pi} \ln z$

On suppose que  $C$  est réel (ainsi que  $Q$ ), si bien qu'on combine un écoulement de vitesse uniforme  $C$  suivant  $x$  avec une source ponctuelle centrée à l'origine.

La vitesse complexe  $u - iv = C + Q/(2\pi z)$  s'annule au point  $(x = -Q/(2\pi C), y = 0)$  qui est donc un point de stagnation. Les lignes de courant, données par  $C R \sin \theta + Q \theta / (2\pi) = 0$ , ont l'allure représentée sur la figure 4.2 et dessinent donc un profil semi-infini. La figure 4.3 montre une réalisation expérimentale en écoulement de Hele-Shaw.

On peut fermer le profil en rajoutant un puits d'intensité opposée  $-Q$  à quelque distance en aval de l'origine, soit  $b$  (figure 4.4) :

$$f(z) = C z + \frac{Q}{2\pi} (\ln z - \ln(z - b))$$

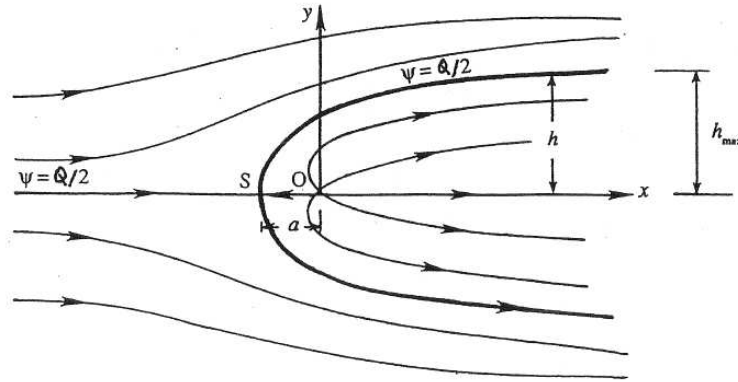


FIG. 4.2 – *Ecoulement généré par une source dans un écoulement.*

2. Hele-Shaw flow past a Rankine half-body. A viscous fluid is introduced through the orifice at the left into a uniform stream of the same fluid flowing between glass plates spaced 0.5 mm apart. Dye shows both the external and internal streamlines for plane potential flow past a semi-infinite body. The streamlines are slightly blurred because the rate of delivery of fluid to the source was changing as the photograph was made. *Taylor 1972*

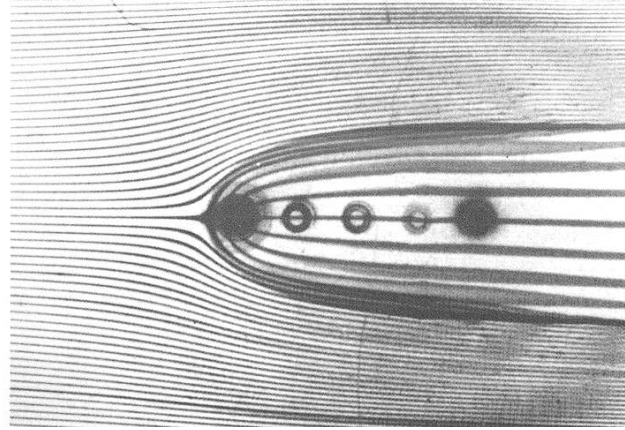


FIG. 4.3 – *Ecoulement généré par une source dans un écoulement. Visualisation expérimentale.*

On peut alors passer à la limite en rapprochant la source et le puits tout en augmentant leur intensité de façon inversement proportionnelle à leur distance, soit  $Q = 2\pi C a^2/b$ , si bien qu'à la limite (figure 4.5) :

$$f(z) = C z + \frac{C a^2}{b} \lim_{b \rightarrow 0} \ln \frac{z}{z - b}$$

$$f(z) = C z + C \frac{a^2}{z} \quad (4.10)$$

Alors, pour  $z = a \exp(i\theta)$  :

$$f(a e^{i\theta}) = C a e^{i\theta} + C a e^{-i\theta} = 2 C a \cos \theta$$

et donc  $\Psi = \Im\{f\} = 0$  sur le cercle de rayon  $a$  centré à l'origine. (4.10) représente donc le potentiel complexe de l'écoulement autour d'un cercle de rayon  $a$ , dans un courant de vitesse

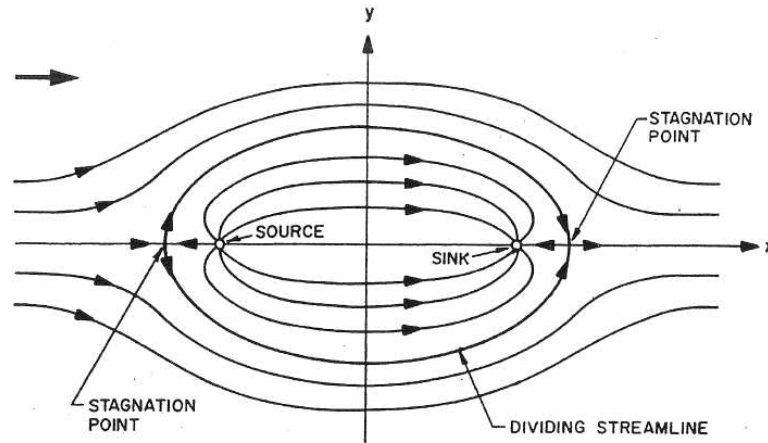


FIG. 4.4 -  $f = Cz + \frac{Q}{2\pi} [\ln(z+b) - \ln(z-b)]$ .

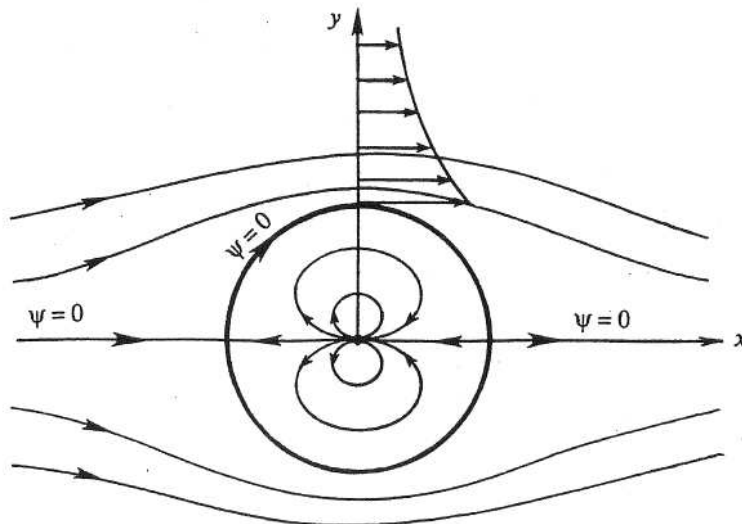


FIG. 4.5 -  $f = Cz + C \frac{a^2}{z}$ .

$C$  suivant l'axe  $x$ .

- $f(z) = z^n$

On a alors, séparant potentiel réel et fonction de courant :

$$\Phi + i \Psi = R^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Les semi-axes radiaux  $\theta = m\pi/n$ , pour lesquels  $\Psi \equiv 0$ , sont donc des lignes de courant de l'écoulement.

Exemple 1 :  $n = 2$

On a alors  $\Psi = 0$  pour  $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ , soit l'écoulement à l'intérieur de dièdres droits. On représente assez bien ainsi l'écoulement au voisinage d'un point de stagnation.

Exemple 2:  $n = 2/3$

On a alors  $\Psi = 0$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = 3\pi/2$ , et on représente donc l'écoulement **extérieur** à un angle droit.

Exemple 3:  $n = 1/2$

On a maintenant  $\Psi = 0$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = 2\pi$ . On représente donc l'écoulement autour d'une plaque confondue avec l'axe des  $x$  positifs.

La figure 4.6 présente quelques uns de ces écoulements.

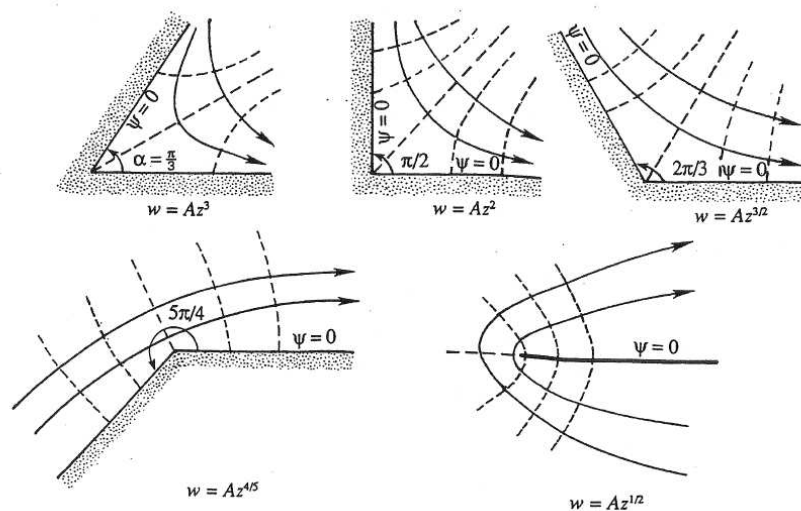


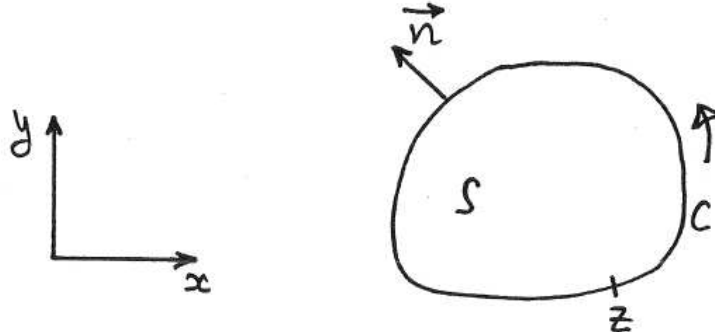
FIG. 4.6 -  $f = Az^n$ .

### 4.3 Rappels sur les fonctions holomorphes de variable complexe

Une fonction  $f$  de la variable complexe  $z = x + iy$  est dite holomorphe si elle est à la fois continue, uniforme et analytique. "Uniforme" signifie qu'elle prend une valeur unique pour chaque valeur de  $z$ . Ainsi  $f(z) = z^2$  est uniforme mais  $\sqrt{z}$  ne l'est pas puisqu'à une valeur de  $z = \rho \exp(i\theta)$  correspondent deux valeurs de  $\sqrt{z}$ :  $\sqrt{\rho} \exp(i\theta/2)$  et  $\sqrt{\rho} \exp(i\theta/2 + i\pi)$ . La fonction  $f(z) = \ln z$  n'est pas non plus uniforme.

### 4.3.1 Théorème de Cauchy

Soit un contour fermé  $C$  et  $f(z)$  une fonction holomorphe à l'intérieur de  $C$ . Alors l'intégrale curviligne  $\oint_C f(z) dz$  est nulle.



#### Démonstration

Soit :

$$I = \oint_C f(z) dz$$

ou, posant  $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ ,  $z = x + iy$  :

$$I = \oint_C (P + iQ) (dx + i dy) = \oint_C P dx - Q dy + i \oint_C Q dx + P dy$$

On note que  $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = d\vec{l}$  et que  $\begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} = \vec{n} dl$ ,  $\vec{n}$  étant le vecteur normal extérieur et le contour étant parcouru dans le sens direct.

Donc l'intégrale  $I$  peut s'écrire :

$$I = - \oint_C \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \cdot \vec{n} dl + i \oint_C \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \cdot d\vec{l}$$

D'où, en appliquant les formules de transformation d'intégrales (Ostrogradsky et Stokes) :

$$I = - \iint_S (Q_x + P_y) dS + i \iint_S (P_x - Q_y) dS$$

et donc  $I \equiv 0$  en vertu des conditions de Cauchy-Riemann.

### 4.3.2 Corollaires

1. Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux contours fermés, tels que  $C_1$  soit intérieur à  $C_2$ , et  $f(z)$  une fonction holomorphe entre  $C_1$  et  $C_2$ . Alors :

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

(les deux contours  $C_1$  et  $C_2$  étant parcourus dans le même sens).

2. Soit un point  $z_0$  intérieur à un contour  $C$ , et  $f(z)$  holomorphe à l'intérieur de  $C$ . Alors  $f$  au point  $z_0$  s'obtient par :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

( $C$  étant parcouru dans le sens direct).

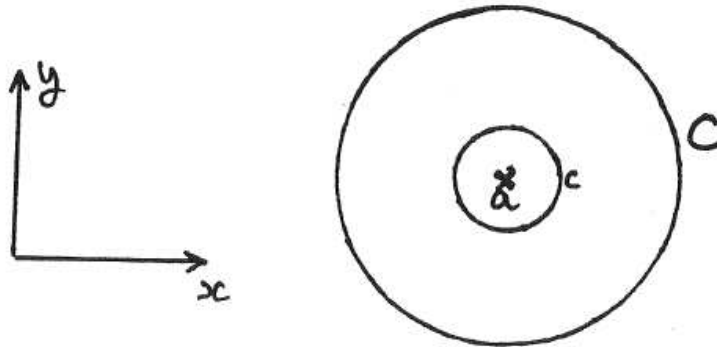
En dérivant  $n$  fois on obtient :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

### 4.3.3 Développement en série de Laurent

#### Points singuliers

Un point est dit singulier pour  $f(z)$  si  $f$  cesse d'y être analytique. Un pôle est un point singulier isolé, autour duquel  $f(z)$  reste uniforme, et tel que  $1/f(z)$  y reste régulier.



Soit  $a$  un pôle pour la fonction  $f(z)$ , et  $C$  un cercle centré en  $a$  tel que la fonction  $f(z)$  soit holomorphe entre  $C$  et un autre petit cercle  $c$  aussi centré en  $a$ . Pour tout point  $z_0$  de l'espace annulaire,  $f(z_0)$  peut se mettre sous la forme :

$$f(z_0) = \dots + \frac{A_{-n}}{(z_0 - a)^n} + \dots + \frac{A_{-1}}{z_0 - a} + A_0 + A_1 (z_0 - a) + \dots + A_n (z_0 - a)^n + \dots \quad (4.11)$$

où les coefficients  $A_{\pm n}$  sont obtenus par :

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

$$A_{-n} = \frac{1}{2i\pi} \oint_c f(z) (z - a)^{n-1} dz$$

### 4.3.4 Théorème des résidus

Soit  $a$  un pôle de la fonction  $f(z)$  et  $C$  un contour fermé autour de  $a$ , tel que la fonction  $f$  soit holomorphe à l'intérieur de  $C$  (sauf en  $a$ ). On a alors :

$$\oint_C f(z) dz = 2i\pi A_{-1} \quad (4.12)$$

(le contour étant parcouru dans le sens direct)

où  $A_{-1}$  est le coefficient de  $1/(z - a)$  dans le développement en série de Laurent.

#### Corollaire

S'il y a  $N$  pôles  $a_n$  à l'intérieur du contour  $C$  :

$$\oint_C f(z) dz = 2i\pi \sum_{n=1}^N A_{n,-1} \quad (4.13)$$

## 4.4 Théorème du cercle

Soit un écoulement "incident" de potentiel complexe  $g(z)$ , en l'absence de frontières rigides, et ne possédant pas de pôle pour  $\|z\| < a$ . Alors, si on introduit un cercle de rayon  $a$  centré à l'origine, le potentiel de l'écoulement est donné par :

$$f(z) = g(z) + g^* \left( \frac{a^2}{z} \right) \quad (4.14)$$

\* désignant le nombre complexe conjugué.

#### Démonstration

Pour un point parcourant le cercle  $z = a \exp(i\theta)$ , on a :

$$f(a e^{i\theta}) = g(a e^{i\theta}) + g^*(a e^{-i\theta})$$

et donc  $\Im\{f\} \equiv 0$  : le cercle est une ligne de courant. Comme  $g$  n'a pas de pôle à l'intérieur du cercle,  $g^*(a^2/z)$  n'en a pas à l'extérieur, et les écoulements décrits par  $g$  et  $f$  sont identiques à l'infini.

#### Exemples

1. Cercle placé dans un courant :

On obtient immédiatement :

$$f(z) = C z + C^* \frac{a^2}{z} \quad (4.15)$$

2. Cylindre immergé sous houle :

Le potentiel de l'écoulement induit par une houle régulière de pulsation  $\omega$ , en théorie linéarisée, est donné par :

$$\Phi_I(x,y,t) = \frac{\zeta g}{\omega} e^{ky} \cos(kx - \omega t)$$

$\zeta$  étant l'amplitude et  $k$  le nombre d'onde, lié à la pulsation  $\omega$  par  $\omega^2 = gk$  (en profondeur infinie).

$y$  est ici l'axe vertical ascendant. Posant  $z = x + iy$ , on peut associer à  $\Phi_I$  le potentiel complexe :

$$g(z,t) = \frac{\zeta g}{\omega} e^{-ikz} e^{i\omega t} = \frac{\zeta g}{\omega} e^{-ikz_0} e^{-ik(z-z_0)} e^{i\omega t}$$

Dans la mesure où le cylindre est profondément immergé, on peut négliger les effets de surface libre et supposer le fluide illimité. Le potentiel complexe de l'écoulement avec cylindre (de rayon  $a$  et centré en  $z_0$ ) est alors donné par :

$$f(z,t) = \frac{\zeta g}{\omega} \left[ e^{-ikz} e^{i\omega t} + e^{ikz_0^*} e^{ik\frac{a^2}{z-z_0}} e^{-i\omega t} \right] \quad (4.16)$$

## 4.5 Théorèmes de Blasius

Ils permettent, **dans le cas où le contour du corps considéré est une ligne de courant**, de mettre l'expression des efforts sous une forme commode pour l'application du théorème des résidus. Dans le cas où le corps considéré est en mouvement, on aura intérêt, pour pouvoir les appliquer, à se placer dans un référentiel lié.

On rappelle l'expression de la pression :

$$p = p_0 - \rho \Phi_t - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2$$

où l'on a négligé la contribution hydrostatique.

Les efforts en  $x$  et  $y$  s'obtiennent par :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = - \oint_C p \vec{n} dl$$

( $\vec{n}$  étant la normale extérieure)

ou :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = - \oint_C p \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$F_x - i F_y = -i \oint_C p (dx - i dy) = -i \oint_C p dz^*$$

Le moment par rapport à l'axe perpendiculaire au plan s'obtient par :

$$C = - \oint_C p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \vec{n} dl = \Re \left\{ \oint_C p z dz^* \right\}$$

### 4.5.1 Terme instationnaire

On s'intéresse tout d'abord au terme  $-\rho \Phi_t$  de la pression. Comme la fonction de courant  $\Psi$  est égale à une constante (dépendant du temps) et que le contour est fermé, il revient au même d'intégrer  $-\rho f_t$  ou  $-\rho f_t^*$ . Choissant cette dernière possibilité, on a :

$$F_{ix} - i F_{iy} = i \rho \oint_C f_t^* dz^* = i \rho \left[ \oint_C f_t dz \right]^* \quad (4.17)$$

Malheureusement il n'existe pas d'expression analogue pour le moment  $C_i$ .

### 4.5.2 Terme quadratique

On a alors :

$$F_{qx} - i F_{qy} = \frac{i}{2} \rho \oint_C f_z f_z^* dz^*$$

soit, compte tenu de ce que :

$$f_z^* dz^* = df^* = df \quad (\text{car ligne de courant}) = f_z dz$$

$$F_{qx} - i F_{qy} = \frac{i}{2} \rho \oint_C f_z^2 dz \quad (4.18)$$

De même on obtient le moment  $C_q$  sous la forme :

$$C_q = -\frac{1}{2} \rho \Re \left\{ \oint_C z f_z^2 dz \right\} \quad (4.19)$$

### 4.5.3 Cylindre placé dans un courant

Soit  $C(t) = u(t) - i v(t)$  la vitesse (complexe) du courant. On suppose de plus une circulation  $\Gamma$  non nulle. Le potentiel complexe de l'écoulement est alors :

$$f(z,t) = C(t) z + C^*(t) \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln z$$

#### Composante instationnaire des efforts :

On a :

$$f_t = \dot{C}(t) z + \dot{C}^*(t) \frac{a^2}{z}$$

Donc  $f_t$  admet un pôle intérieur au cylindre, à l'origine, d'intensité  $\dot{C}^* a^2$ . On en déduit, d'après (4.17) et (4.12) :

$$F_{ix} - i F_{iy} = i \rho [2i\pi \dot{C}^* a^2]^* = 2\rho\pi a^2 \dot{C}$$

ou :

$$\begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix} = 2\rho\pi a^2 \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

$u'$  et  $v'$  étant les composantes suivant  $x$  et  $y$  de l'accélération de l'écoulement incident.

#### Composante quadratique :

On a :

$$f_z = C - C^* \frac{a^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi z}$$

et donc  $f_z^2$  admet un pôle simple à l'origine, d'intensité  $2C\Gamma/(2i\pi) = -iC\Gamma/\pi$ . On obtient alors, appliquant (4.18) et (4.12) :

$$F_{qx} - i F_{qy} = \frac{i}{2} \rho 2i\pi (-i) C \frac{\Gamma}{\pi} = i\rho C \Gamma$$

ou :

$$\begin{pmatrix} F_{qx} \\ F_{qy} \end{pmatrix} = \rho \Gamma \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$$

soit donc un effort (de portance) perpendiculaire au vecteur vitesse  $(u, v)$ .

### 4.5.4 Cylindre sous houle

On rappelle l'expression obtenue pour le potentiel complexe (4.16) :

$$f(z,t) = \frac{\zeta g}{\omega} \left[ e^{-ikz} e^{i\omega t} + e^{ikz_0^*} e^{ik \frac{a^2}{(z-z_0)}} e^{-i\omega t} \right]$$

D'où pour  $f_t$  :

$$f_t = i\zeta g \left[ e^{-ikz} e^{i\omega t} - e^{ikz_0^*} e^{ik \frac{a^2}{(z-z_0)}} e^{-i\omega t} \right]$$

Le pôle en  $z = z_0$  s'obtient en développant le terme  $e^{ik a^2/(z-z_0)}$  :

$$e^{ik \frac{a^2}{z-z_0}} = 1 + ik \frac{a^2}{z-z_0} + \dots$$

et donc le pôle de  $f_t$  en  $z = z_0$  est :

$$-i \zeta g e^{ik z_0^*} ik a^2 e^{-i\omega t} = \zeta a^2 \omega^2 e^{k y_0} e^{-i\omega t}$$

(posant  $z_0 = i y_0$ ).

Appliquant à nouveau (4.17) et (4.12) on obtient :

$$F_{ix} - i F_{iy} = 2 \rho \pi a^2 \zeta \omega^2 e^{k y_0} e^{i\omega t}$$

ou :

$$\begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{pmatrix} = 2 \rho \pi a^2 \zeta \omega^2 e^{k y_0} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}$$

### Effort moyen vertical

La dérivée en  $z$  de  $f$  s'écrit :

$$f_z = \frac{\zeta g}{\omega} \left[ -ik e^{-ikz} e^{i\omega t} - ik \frac{a^2}{(z-z_0)^2} e^{ik z_0^*} e^{ik \frac{a^2}{z-z_0}} e^{-i\omega t} \right]$$

Le terme indépendant du temps de  $f_z^2$  est alors :

$$\overline{f_z^2} = -2 \zeta^2 \omega^2 \frac{a^2}{(z-z_0)^2} e^{-ik(z-z_0^*)} e^{ik \frac{a^2}{z-z_0}}$$

La détermination du résidu en  $z = z_0$  requiert de développer les deux exponentielles. Il s'exprime alors sous la forme d'une série. Si on suppose petit le rayon  $a$  du cylindre devant la longueur d'onde ( $2\pi/k$ ) de la houle, il est justifié de ne retenir que le premier terme. Les efforts moyens s'écrivent alors :

$$\overline{F_{qx}} - i \overline{F_{qy}} = \frac{i}{2} \rho 2i \pi 2i \zeta^2 \omega^2 a^2 k e^{2k y_0}$$

(toujours posant  $z_0 = i y_0$ )

soit :

$$\begin{pmatrix} \overline{F_{qx}} \\ \overline{F_{qy}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \rho \pi a^2 k^2 \zeta^2 g e^{2k y_0} \end{pmatrix}$$

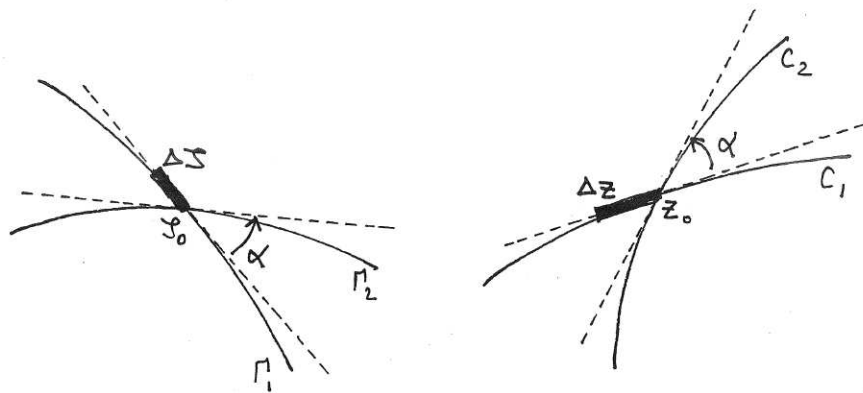
On obtient donc un effort moyen vertical qui tend à attirer le cylindre vers la surface libre. C'est là un effet bien connu de la houle sur les sous-marins en faible immersion.

## 4.6 Transformations conformes

Soient les variables complexes  $\zeta$  et  $z$ , et une transformation analytique  $z = g(\zeta)$ . A une courbe  $\Gamma$  du plan complexe  $\zeta$  elle fait correspondre une courbe  $C$  du plan  $z$ .

La propriété fondamentale de la transformation  $g$  est de conserver, localement, les angles. C'est à dire que si deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se coupent au point  $\zeta_0$  avec un angle  $\alpha$ , leurs transformées  $C_1$  et  $C_2$  se coupent au point  $z_0 = g(\zeta_0)$  avec le même angle  $\alpha$ .

Soit en effet un petit vecteur  $\Delta\zeta = \Delta\rho \exp(i\theta)$  centré au point  $\zeta_0$ . Dans la transformation  $\Delta\zeta$  devient  $\Delta z = g'(\zeta_0) \Delta\zeta = \|g'(\zeta_0)\| \Delta\rho \exp(i\theta + i \text{Arg}(g'(\zeta_0)))$ . Donc le vecteur  $\Delta\zeta$  se transforme en  $\Delta z$  par une dilatation égale à  $\|g'\|$  et une rotation égale à  $\text{Arg}(g')$ , qui ne dépendent pas de l'orientation de  $\Delta\zeta$ : les deux vecteurs tangents aux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  tournent du même angle et l'angle  $\alpha$  se conserve.



Ces considérations supposent évidemment que  $g'$  ne soit ni nul ni infini au point considéré. En particulier si  $g'$  est localement de la forme :

$$g'(\zeta) \simeq A (\zeta - \zeta_0)^r \quad (r \neq -1)$$

alors

$$g(\zeta) \simeq g(\zeta_0) + B (\zeta - \zeta_0)^{r+1}$$

et

$$\text{Arg}(z - z_0) = \text{Arg}(B) + (r + 1) \text{Arg}(\zeta - \zeta_0)$$

Donc la valeur de l'angle transformé dépend de  $\zeta - \zeta_0$ .

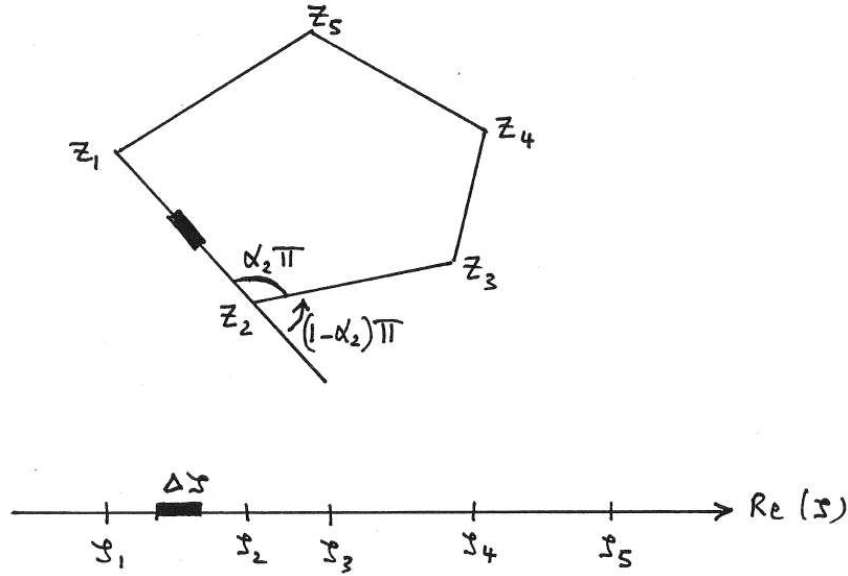
Par exemple si on prend la transformation  $z = \zeta^2$  et  $\zeta_0$  à l'origine, le demi-axe ( $\Re\{\zeta\} > 0, \Im\{\zeta\} = 0$ ) correspondant à  $\text{Arg}(\zeta) = 0$  se transforme en le demi-axe ( $\Re\{z\} > 0, \Im\{z\} = 0$ ). Le demi-axe ( $\Re\{\zeta\} < 0, \Im\{\zeta\} = 0$ ) correspondant à  $\text{Arg}(\zeta) = \pi$  se transforme en  $\text{Arg}(z) = 2\pi$ , soit donc également le demi-axe ( $\Re\{z\} > 0, \Im\{z\} = 0$ ). Globalement le demi-plan  $\Im\{\zeta\} > 0$  se transforme dans tout le plan  $z$ . Si l'on considère dans le demi-plan  $\Im\{\zeta\} > 0$  l'écoulement  $f(\zeta) = C \zeta$ , avec  $C$  réel, qui représente donc un écoulement uniforme de vitesse  $C$  suivant l'axe horizontal, dans la transformation cet écoulement devient un écoulement qui contourne la plaque horizontale ( $\Re\{z\} > 0, \Im\{z\} = 0$ ), de potentiel  $f(\zeta(z)) = C z^{1/2}$ . On retrouve ainsi l'écoulement déjà étudié au paragraphe 4.2.

### 4.6.1 Transformation de Schwarz-Christoffel

Soit, dans le plan  $\zeta$ , une succession de  $N$  points  $\zeta_1, \dots, \zeta_N$  sur l'axe réel. On considère la transformation définie par :

$$\frac{dz}{d\zeta} = A \prod_{n=1}^N (\zeta - \zeta_n)^{(\alpha_n - 1)} \quad (4.20)$$

$A$  étant une constante complexe.



Soit en un point  $\zeta$  de l'axe réel (avec  $\Im(\zeta) = 0^+$ ) un élément vecteur  $\Delta\zeta$  porté par l'axe et d'argument nul. Si  $\zeta$  ne coïncide avec aucun des  $\zeta_n$  la transformation définie par (4.20) est analytique et :

$$\text{Arg}(\Delta z) = \text{Arg}(A) + \sum_{n=1}^N (\alpha_n - 1) \text{Arg}(\zeta - \zeta_n)$$

En particulier si  $\zeta$  est pris à gauche de tous les  $\zeta_n$ , alors  $\text{Arg}(\zeta - \zeta_n) = \pi \forall n$  et :

$$\text{Arg}(\Delta z) = \text{Arg}(A) + \sum_{n=1}^N (\alpha_n - 1) \pi$$

$A$  étant une constante, cet argument est le même quelle que soit la position du point  $\zeta$  et donc tous les points situés à gauche du point  $\zeta_1$  se transforment en un segment de droite (ou une demi-droite).

Si maintenant  $\zeta$  est pris entre  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , alors  $\text{Arg}(\zeta - \zeta_1) = 0$  et  $\text{Arg}(\zeta - \zeta_n) = \pi \forall n \neq 1$ , si bien que :

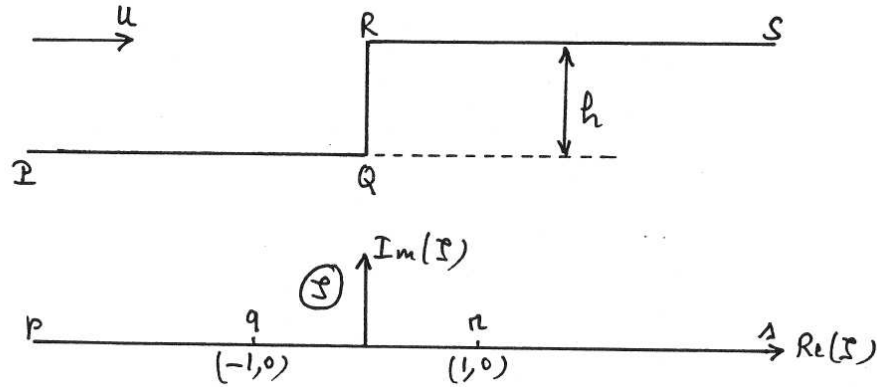
$$\text{Arg}(\Delta z) = \text{Arg}(A) + \sum_{n=2}^N (\alpha_n - 1) \pi$$

si bien que le segment  $\zeta_1\zeta_2$  se transforme en un segment  $z_1z_2$  faisant un angle  $(1 - \alpha_1) \pi$  avec le précédent, donc définissant un angle intérieur égal à  $\alpha_1 \pi$ .

L'axe réel du plan  $\zeta$  se transforme ainsi en une ligne brisée qui se referme éventuellement en un polygone si la somme des angles intérieurs est égale à  $(n - 2) \pi$ .

## 4.6.2 Applications

### 1. Écoulement sur une marche



On cherche à obtenir le potentiel complexe d'un écoulement de vitesse  $U$  à l'infini rencontrant une marche de hauteur  $h$ .

On définit la transformation conforme

$$\frac{dz}{d\zeta} = A \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}} \quad (4.21)$$

qui fait correspondre aux points anguleux  $Q$  et  $R$  du plan  $z$  les points  $q$  et  $r$  du plan  $\zeta$  de coordonnées  $(-1, 0)$  et  $(+1, 0)$ . Elle fait également correspondre les points à l'infini  $P$  et  $S$  aux points  $p$  et  $s$ . On en tire que la constante  $A$  est nécessairement réelle puisque  $dz/d\zeta \rightarrow A$  quand  $\|\zeta\| \rightarrow \infty$ , et que les écoulements à l'infini dans les plans  $z$  et  $\zeta$  sont parallèles.

Pour intégrer (4.21) on l'écrit sous la forme :

$$\frac{dz}{d\zeta} = A \frac{\zeta - 1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} = A \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{A}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

D'où :

$$z = z_0 + A \left[ \sqrt{\zeta^2 - 1} - \text{Argch } \zeta \right]$$

ou :

$$z = z_0 + A \left[ \sqrt{\zeta^2 - 1} - \ln \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right]$$

La correspondance des points  $q$  et  $Q$ ,  $r$  et  $R$ , permet de déterminer les constantes de la transformation  $z_0$  et  $A$ .

Pour  $\zeta = 1$  on obtient  $z = z_0$ .

Pour  $\zeta = -1$  on a  $z = z_0 - A \ln(-1) = z_0 - i\pi A$

La hauteur  $h$  de la marche donne donc :  $A = h/\pi$ .

Si on prend  $z_0 = 0$  l'origine du plan  $z$  est en  $R$ . Si on la souhaite en  $Q$  il suffit de prendre  $z_0 = ih$ . Le choix est évidemment sans importance. Dans la suite on fait  $z_0 = 0$ .

Dans le plan  $\zeta$  l'écoulement admet comme potentiel  $f(\zeta) = V \zeta$  où, compte tenu de ce que  $dz/d\zeta \rightarrow A$  pour  $\|\zeta\| \rightarrow \infty$ , nécessairement  $V = AU$  de façon que  $df/dz = df/d\zeta \times d\zeta/dz \rightarrow U$  pour  $\|z\| \rightarrow \infty$ .

Finalement on obtient la solution :

$$f = \frac{U h}{\pi} \zeta \quad z = \frac{h}{\pi} \left[ \sqrt{\zeta^2 - 1} - \text{Argch } \zeta \right]$$

qui fournit donc  $f(z)$  sous forme indirecte. On peut la paramétrer de façon plus commode en introduisant la variable auxiliaire  $t$  définie par  $\zeta = \text{ch } t$ . On a alors :

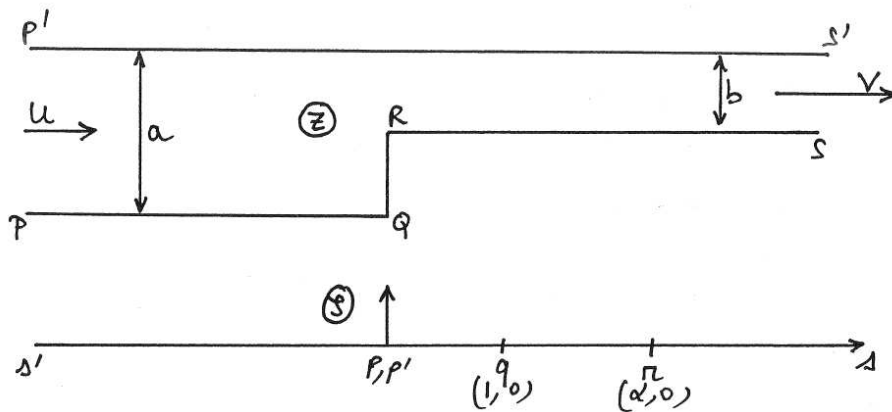
$$f = \frac{U h}{\pi} \text{ch } t \quad z = \frac{h}{\pi} (\text{sh } t - t)$$

Exercice :

Posant  $\zeta = \pm 1 + \epsilon$ , vérifier que  $f(z)$  est d'ordre  $z^{2/3}$  au voisinage du point  $R$ , et d'ordre  $(z + ih)^2$  au voisinage du point  $Q$ .

Calculer l'effort qui s'applique sur  $QR$ .

## 2. Ecoulement avec marche et toit



On définit la transformation :

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta} \sqrt{\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - 1}} \quad (4.22)$$

On détermine les constantes  $K$  et  $\alpha$  pour assurer la correspondance des points  $P, P', S, S'$  et de leurs points images.

• Points  $P$  et  $P'$

Pour  $\|\zeta\|$  petit on a :

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta} \sqrt{\alpha} \quad \rightarrow \quad z = K \sqrt{\alpha} \ln \zeta$$

soit, pour  $\zeta = \epsilon \exp(i\theta)$ ,  $z = K \sqrt{\alpha} [\ln \epsilon + i\theta]$ . Donc la partie imaginaire de  $z$  varie de 0 à  $\pi K \sqrt{\alpha}$  quand  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$ . Pour obtenir la bonne hauteur amont  $a$ , on doit avoir :

$$K \sqrt{\alpha} \pi = a$$

• Points  $S$  et  $S'$

Pour  $\|\zeta\| \rightarrow \infty$  on a :

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta} \quad \rightarrow \quad z = K \ln \zeta$$

d'où l'on tire, en raisonnant comme ci-dessus sur les limites 0 et  $\pi$  de l'argument de  $\zeta$ , que :

$$K \pi = b$$

On a donc déterminé les deux constantes de la transformation :  $K = b/\pi$  et  $\alpha = a^2/b^2$ .

Reste à déterminer le potentiel complexe de l'écoulement. Dans le plan  $\zeta$  on a une simple source à l'origine :

$$f(\zeta) = \frac{Q}{2\pi} \ln \zeta$$

d'où la vitesse dans le plan  $z$  :

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta - \alpha}}$$

Pour  $\zeta \rightarrow 0$  on a  $df/dz = U$ , ce qui détermine  $Q$  :

$$Q = 2\pi K \sqrt{\alpha} \quad f = \frac{U a}{\pi} \ln \zeta$$

On peut alors en faisant tendre  $\zeta$  vers l'infini en déduire la vitesse à l'infini aval :  $V = U a/b$ , ce qui assure l'égalité des débits entrant et sortant.

Comme dans le cas précédent il ne reste plus qu'à intégrer la transformation (4.22). Pour cela on peut introduire la variable auxiliaire  $t$  définie par :

$$\sqrt{\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - 1}} = \frac{1}{t}$$

ou

$$\zeta = \frac{1 - \alpha t^2}{1 - t^2}$$

D'où, par dérivation :

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \left( \frac{-2\alpha t}{1 - \alpha t^2} + \frac{2t}{1 - t^2} \right) dt$$

et :

$$dz = K \left( \frac{-2\alpha}{1 - \alpha t^2} + \frac{2}{1 - t^2} \right) dt$$

qui s'intègre en :

$$z = z_0 + K \left( \ln \frac{1 - \alpha t}{1 + \alpha t} + \ln \frac{1 + t}{1 - t} \right)$$

Par ailleurs le potentiel s'écrit :

$$f = \frac{U a}{\pi} \ln \frac{1 - \alpha t^2}{1 - t^2}$$

En exercice, comme dans le problème précédent, on peut calculer l'effort hydrodynamique appliqué sur la marche.

## 4.7 Ecoulements autour de profils

Soit, dans le plan  $\zeta$ , un cercle  $C_0$  de rayon  $b$ , centré en  $\zeta_0$  et contenant l'origine ( $b > \|\zeta_0\|$ ). Alors une transformation du type :

$$z = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \tag{4.23}$$

transforme le domaine extérieur au cercle en le domaine extérieur à un certain profil  $P$ , tout en conservant l'écoulement à l'infini. En effet  $dz/d\zeta \rightarrow 1$  quand  $\|z\|$  et  $\|\zeta\| \rightarrow \infty$ . Donc les directions et modules de la vitesse à l'infini sont les mêmes. On parle alors de transformation canonique.

On s'intéresse plus particulièrement à des écoulements uniformes d'incidence  $\alpha$  par rapport à l'axe horizontal. Dans le plan  $\zeta$  le potentiel complexe est alors donné par :

$$f(\zeta) = C \zeta + C^* \frac{b^2}{\zeta - \zeta_0} + \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln(\zeta - \zeta_0)$$

où  $C = U e^{-i\alpha}$ .  $\Gamma$  est une circulation qui sera fixée ultérieurement par la condition de Kutta-Joukowski.

### 4.7.1 Efforts sur le profil

Ils sont donnés par la formule de Blasius (4.18) :

$$F_x - i F_y = \frac{i}{2} \rho \oint_P \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz$$

soit, comme  $df/dz = df/d\zeta \times d\zeta/dz$  :

$$F_x - i F_y = \frac{i}{2} \rho \oint_{C_0} \left( \frac{df}{d\zeta} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta$$

On a :

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{\zeta^{n+1}}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^{n+1}}$$

(avec  $c_1 = a_1$ )

et :

$$\left( \frac{df}{d\zeta} \right)^2 = \left[ C - C^* \frac{b^2}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi(\zeta - \zeta_0)} \right]^2$$

Donc le facteur  $d\zeta/dz$  n'affecte pas le résidu et :

$$F_x - i F_y = i \rho \Gamma C = i \rho \Gamma U e^{-i\alpha} \quad (4.24)$$

On obtient donc un effort de portance (perpendiculaire à l'écoulement incident) indépendant de la transformation.

Par contre le moment, donné par (4.19) :

$$M = -\frac{1}{2} \rho \Re \left\{ \oint_P z \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

est affecté par la transformation :

$$M = -\frac{1}{2} \rho \Re \left\{ \oint_{C_0} \left( \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \right) \left[ C - C^* \frac{b^2}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi(\zeta - \zeta_0)} \right]^2 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta \right\}$$

Il y a deux pôles, en  $\zeta = 0$  et  $\zeta = \zeta_0$ .

Le résidu en  $\zeta = 0$  est :

$$C^2 (a_1 + c_1) = 2 C^2 a_1$$

Celui en  $\zeta = \zeta_0$  consiste de trois termes dont les deux premiers sont réels :

$$-2 C C^* b^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + \frac{2\Gamma C \zeta_0}{2i\pi}$$

Si bien que le moment est donné par :

$$M = -\frac{1}{2} \rho \Re \{ 4i\pi C^2 a_1 + 2\Gamma C \zeta_0 \}$$

$$M = 2\pi U^2 \Im\{a_1 e^{-2i\alpha}\} - \rho \Gamma U \Re\{\zeta_0 e^{-i\alpha}\} \quad (4.25)$$

où  $\Im$  désigne la partie imaginaire.

Le second terme représente l'effort de portance, appliqué en  $\zeta_0$  suivant la direction normale à l'écoulement incident, multiplié par le bras de levier. Le premier terme est indépendant de la circulation. C'est le "moment de Munk", dont on reparle au chapitre suivant.

## 4.7.2 Exemple de transformation

On considère la transformation :

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \quad (4.26)$$

le cercle  $C_0$  étant centré à l'origine ( $\zeta_0 = (0.,0.)$ ). Il se transforme alors en le segment de droite  $[-2b \ 2b]$ , comme on le vérifie aisément :

$$\zeta = b e^{i\theta} \rightarrow z = 2b \cos \theta$$

La transformation inverse s'obtient en résolvant :

$$\zeta^2 - z\zeta + b^2 = 0$$

soit :

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4b^2}}{2}$$

la seconde solution  $\zeta = (z - \sqrt{z^2 - 4b^2})/2$  étant à éliminer car non canonique (elle transforme le plan  $z$  en l'intérieur du cercle  $C_0$ ).

Par cette transformation on retrouve une fois de plus l'expression du potentiel de l'écoulement autour d'un cercle. Soit en effet dans le plan  $z$  l'écoulement  $U z$ , où  $U$  est réel. La plaque  $[-2b \ 2b]$  étant sans épaisseur, c'est une solution de l'écoulement avec plaque. Alors  $U (\zeta + b^2/\zeta)$  représente l'écoulement transformé autour du cercle.

Inversement on peut déterminer le potentiel d'un écoulement en incidence par rapport à la plaque en partant d'un écoulement en incidence par rapport au cercle dans le plan  $\zeta$ . Par exemple pour un écoulement normal :

$$f = -iU \left( \zeta - \frac{b^2}{\zeta} \right)$$

que l'on peut écrire, comme  $b^2/\zeta = z - \zeta$  (4.26) :

$$f = -iU (2\zeta - z)$$

soit finalement :

$$f(z) = -iU \sqrt{z^2 - 4b^2} \quad (4.27)$$

### 4.7.3 Profils de Joukowski

On considère toujours la même transformation :

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta}$$

mais on fait varier le rayon  $a$  et la position  $\zeta_0$  du centre du cercle  $C_0$ . La figure 4.7 montre comment évoluent les profils transformés dans le plan  $z$ . En particulier un cercle centré dans le quart du plan ( $\Re\{\zeta\} < 0, \Im\{\zeta\} > 0$ ) et passant par le point  $(b, 0)$  se transforme en un profil évoquant quelque peu une aile d'avion, avec un point anguleux au point  $(2b, 0)$  du plan  $z$ .

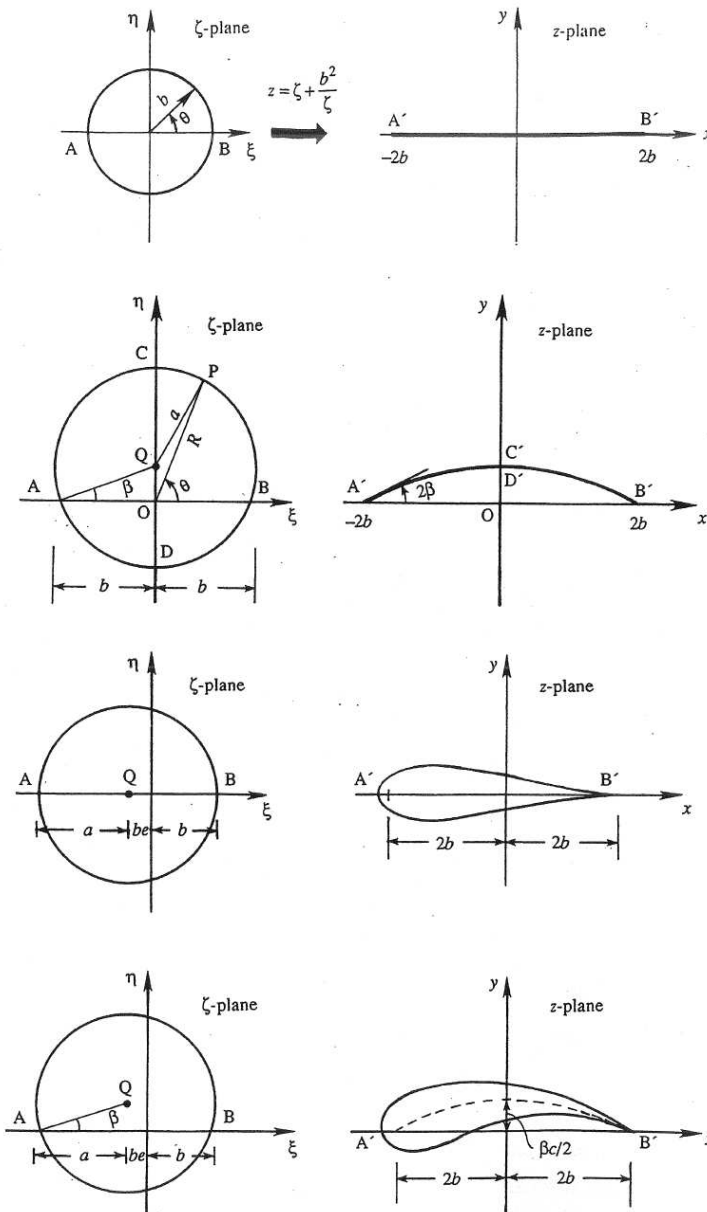


FIG. 4.7 – Transformation de Joukowski appliquée à un cercle.

C'est là qu'intervient la condition dite de Kutta-Joukowski, qui traduit la constatation physique que sur un tel profil l'écoulement ne contourne pas la pointe, mais quitte le profil tangentiellement. Mathématiquement cela signifie que, la transformation  $z(\zeta)$  y étant singulière ( $dz/d\zeta = 0$ ), la vitesse dans le plan  $\zeta$  doit être nulle au point  $(b, 0)$ .

La vitesse complexe dans le plan  $\zeta$  est donnée par :

$$f' = u - iv = U e^{-i\alpha} - U e^{i\alpha} \frac{a^2}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{\Gamma}{2i\pi(\zeta - \zeta_0)}$$

soit, pour  $\zeta = \zeta_0 + a e^{i\theta}$  :

$$f' = e^{-i\theta} \left[ 2iU \sin(\theta - \alpha) + \frac{\Gamma}{2i\pi a} \right]$$

Il suffit alors de repérer la valeur de  $\theta$  correspondant au point  $(b, 0)$ . On en déduit la valeur de la circulation  $\Gamma$  telle que  $f'$  y soit nul et, par suite, la portance par (4.24).

### Plaque plane

En ce cas  $a = b$  et  $\theta = 0$ , le cercle étant centré à l'origine.

On a donc :

$$\Gamma = -4\pi U b \sin \alpha$$

et :

$$F_x - i F_y = -4i\pi\rho U^2 b \sin \alpha e^{-i\alpha}$$

soit une portance de  $4\pi\rho U^2 b \sin \alpha$  perpendiculaire à l'écoulement.

On exprime le coefficient de portance  $C_L$  par :

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho l U^2}$$

où  $l$  est la longueur de la corde du profil, ici  $l = 4b$ . Donc, pour une plaque plane :

$$C_L = 2\pi \sin \alpha$$

Le moment, donné par (4.25), se réduit au moment de Munk :

$$M = -2\rho\pi b^2 U^2 \sin 2\alpha$$

Il a un effet déstabilisant : il tend à orienter la plaque à 90 degrés de la direction de l'écoulement.

## Profil épais symétrique

Pour un cercle  $C_0$  de rayon  $a > b$  et centré sur l'axe  $x$  on obtient un profil  $P$  en goutte d'eau (ou en têtard), d'autant plus épais que  $a$  est grand devant  $b$ .

Le point  $(b - 2a, 0)$ , deuxième intercept de  $C_0$  avec l'axe  $x$ , se transforme en :

$$z = b - 2a + \frac{b^2}{b - 2a}$$

et la longueur de corde est :

$$l = 2b - \left( b - 2a + \frac{b^2}{b - 2a} \right) = \frac{4a^2}{2a - b}$$

La circulation est toujours égale à :

$$\Gamma = -4\pi a U \sin \alpha$$

D'où le coefficient de portance :

$$C_L = 2\pi \sin \alpha \frac{a(2a - b)}{a^2}$$

Pour  $a = b$  on retrouve le cas précédent. On remarque que le coefficient  $C_L$  augmente avec  $a$ , vers une valeur asymptotique de  $4\pi \sin \alpha$  pour  $a \gg b$ . Épaissir le profil permet donc d'augmenter la portance, au risque évidemment de provoquer le décrochage.

# Chapitre 5

## Solide indéformable en mouvement dans un fluide illimité

On considère ici le problème d'un corps solide en mouvement dans un fluide illimité, toujours sous les hypothèses de fluide parfait et d'écoulement irrotationnel. On suppose que le mouvement du fluide est dû uniquement au mouvement propre du corps.

On suppose aussi que la circulation est nulle sur tout contour fermé.

On a vu au chapitre précédent que, en deux dimensions, le potentiel complexe d'une singularité de type source s'exprime par  $f(z) = Q/2\pi \ln(z - z_i)$ . Cette singularité exprime qu'un certain débit fluide prend place au point  $z_i$ . Pour représenter un corps solide **indéformable**, auquel cas le volume fluide ne change pas, il est nécessaire de combiner plusieurs sources  $Q_i$  dont la somme algébrique  $\sum_i Q_i$  est nulle. Il s'ensuit que le potentiel complexe de l'écoulement décroît comme  $1/z = \partial/\partial z \ln z$  avec l'éloignement du corps solide.

En trois dimensions les mêmes considérations s'appliquent, à la différence que le potentiel élémentaire d'une source ponctuelle est  $-Q/4\pi R$ , où  $R$  est la distance entre le point source et le point considéré. Le potentiel lointain d'un solide indéformable décroît donc comme  $1/R^2$ , et la vitesse fluide comme  $1/R^3$ . Ceci évidemment en l'absence de mouvement propre du fluide, hypothèse faite dans ce chapitre.

### 5.1 Efforts hydrodynamiques

Soit  $S$  la surface mouillée du corps considéré,  $\vec{n}$  le vecteur normal, extérieur au domaine fluide donc intérieur au corps, et  $oxyz$  un repère **fixe** de référence. Les efforts hydrodynamiques s'expriment par :

$$\vec{F} = \iint_S p \vec{n} dS \quad \vec{C} = \iint_S p (\vec{r} \wedge \vec{n}) dS \quad (5.1)$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur  $(x, y, z)$  et  $p$  la pression donnée par la relation de Bernoulli :

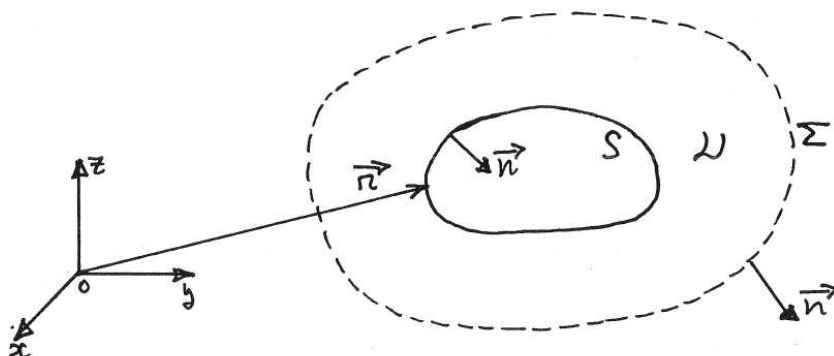
$$p = -\rho \Phi_t - \frac{1}{2} \rho (\nabla \Phi)^2 \quad (5.2)$$

la composante hydrostatique étant ici sans autre effet que la poussée d'Archimède.

L'introduction de (5.2) dans (5.1) donne :

$$\vec{F} = -\rho \iint_S \left( \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 \right) \vec{n} dS \quad \vec{C} = -\rho \iint_S \left( \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 \right) (\vec{r} \wedge \vec{n}) dS \quad (5.3)$$

Sous cette forme ces expressions ne sont guère commodes d'utilisation et on va les transformer en tirant parti de l'hypothèse de fluide illimité au repos à l'infini. Pour cela on introduit une surface fictive  $\Sigma$  englobant le corps, **invariable** au cours du temps, et délimitant un volume fluide  $\mathcal{V}(t)$  avec  $S$ .



Soit  $\vec{Q}$  la quantité de mouvement du fluide dans le domaine  $\mathcal{V}(t)$  :

$$\vec{Q} = \rho \iiint_{\mathcal{V}} \nabla\Phi dV$$

que l'on peut réécrire :

$$\vec{Q} = \rho \iint_{S \cup \Sigma} \Phi \vec{n} dS$$

La dérivée en temps de  $\vec{Q}$  s'exprime par (voir paragraphe 1.2) :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \rho \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\Phi) dV + \rho \iint_{S \cup \Sigma} \nabla\Phi \vec{U} \cdot \vec{n} dS$$

où  $\vec{U} \cdot \vec{n}$  est la vitesse normale de la frontière, nulle sur  $\Sigma$  et égale à  $\nabla\Phi \cdot \vec{n}$  sur  $S$  :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \rho \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \frac{\partial\Phi}{\partial t} dV + \rho \iint_S \nabla\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS$$

ou :

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \rho \iint_{S \cup \Sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \vec{n} dS + \rho \iint_S \nabla\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS$$

On en déduit donc :

$$\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_{S \cup \Sigma} \Phi \vec{n} dS \right] = \rho \iint_S \left( \Phi_t \vec{n} + \nabla\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS + \rho \iint_{\Sigma} \Phi_t \vec{n} dS$$

La surface de référence  $\Sigma$  étant invariable, on peut y permuter les opérations de dérivation en temps et intégration sur la surface :

$$\frac{d}{dt} \left[ \iint_{\Sigma} \Phi \vec{n} dS \right] = \iint_{\Sigma} \Phi_t \vec{n} dS$$

Il vient donc finalement :

$$\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{n} dS \right] = \rho \iint_S \left( \Phi_t \vec{n} + \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS \quad (5.4)$$

et les efforts hydrodynamiques s'obtiennent par :

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{n} dS \right] + \rho \iint_S \left( \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \vec{n} \right) dS \quad (5.5)$$

On montre de même que le moment par rapport au centre  $o$  du repère **fixe** s'exprime par :

$$\vec{C} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{r} \wedge \vec{n} dS \right] + \rho \iint_S \vec{r} \wedge \left( \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \vec{n} \right) dS \quad (5.6)$$

On tire alors parti de ce que, si  $\vec{V}$  est un champ de vitesse à divergence et rotationnel nuls :

$$\iint_{S \cup \Sigma} \left( \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2} V^2 \vec{n} \right) dS \equiv 0$$

qui découle directement de l'identité (3.4) :

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) + \text{Rot } \vec{V} \wedge \vec{V}$$

On peut donc indifféremment écrire  $\vec{F}$  sous la forme :

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{n} dS \right] - \rho \iint_{\Sigma} \left( \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \vec{n} \right) dS \quad (5.7)$$

De même on établit pour le moment  $\vec{C}$  :

$$\vec{C} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{r} \wedge \vec{n} dS \right] - \rho \iint_{\Sigma} \vec{r} \wedge \left( \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \vec{n} \right) dS \quad (5.8)$$

Notons que ces relations s'appliquent que la surface  $\Sigma$  soit réelle ou fictive, du moment qu'elle soit invariable.

On tire alors parti de ce que, la surface fictive  $\Sigma$  étant arbitraire, elle peut être rejetée à l'infini. Les intégrales sur  $\Sigma$  tendent alors vers zéro comme  $R^{-4}$  pour  $\vec{F}$  et  $R^{-3}$  pour  $\vec{C}$  (en trois dimensions ; en deux dimensions l'intégrale pour  $\vec{F}$  décroît comme  $R^{-3}$  et celle pour  $\vec{C}$  comme  $R^{-2}$ )<sup>1</sup>. On peut donc éliminer les intégrales sur  $\Sigma$  :

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{n} dS \right] \quad (5.9)$$

$$\vec{C} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{r} \wedge \vec{n} dS \right] \quad (5.10)$$

De ces expressions on déduit immédiatement le paradoxe de d'Alembert : pour un corps en translation uniforme,  $\iint_S \Phi \vec{n} dS$  ne dépend pas de la variable  $t$ , et donc  $\vec{F}=0$ . Par contre le moment n'est pas nul puisque  $\vec{r}$  est référencé à un repère fixe (tel que le fluide soit au repos à l'infini) et que donc :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{U} t$$

où  $\vec{U}$  est la vitesse de translation et  $\vec{r}_0$  les coordonnées initiales (à  $t = 0$ ). Il vient donc :

$$\vec{C} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi (\vec{r}_0 + \vec{U} t) \wedge \vec{n} dS \right]$$

soit :

$$\vec{C} = -\rho \vec{U} \wedge \iint_S \Phi \vec{n} dS$$

Ce moment est connu sous le nom de moment de Munk.

## 5.2 La matrice de masses et inerties ajoutées

Pour appliquer les expressions obtenues pour les efforts il reste le problème, non trivial apparemment, de déterminer le potentiel  $\Phi$ . Pour cela on va tirer parti de ce que, dans un référentiel lié au corps en mouvement, la géométrie ne change pas puisque le domaine fluide est illimité.

De façon classique on définit la cinématique du corps par une vitesse de translation  $\vec{U}_0(t)$  d'un point de référence, soit  $O$ , et une vitesse de rotation  $\Omega(t)$ . La vitesse d'un point  $P$  quelconque lié au corps s'écrit :

$$\vec{U}(P,t) = \vec{U}_0(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{OP}(t) \quad (5.11)$$

La condition de glissement vérifiée par  $\Phi$  sur la carène s'écrit alors :

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = \left( \vec{U}_0 + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP} \right) \cdot \vec{n}$$

---

1. On peut remarquer que ces intégrales tendent aussi vers zéro dans le cas d'un corps déformable.

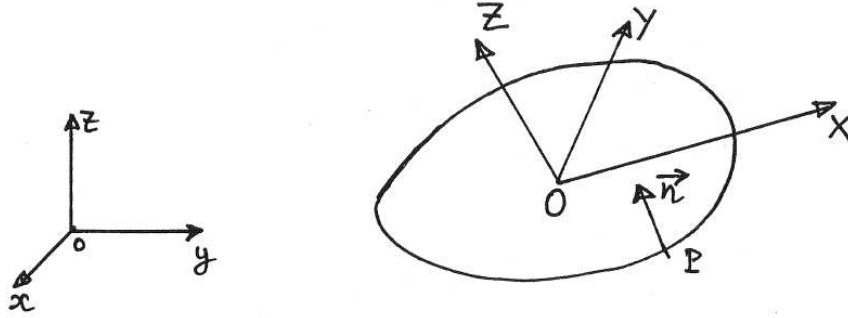
ou :

$$\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \vec{U}_0 \cdot \vec{n} + \vec{\Omega} \cdot (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{n}) \quad (5.12)$$

où l'on a appliqué la formule dite du "produit mixte" :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

Les autres conditions satisfaites par  $\Phi$  étant la condition de Laplace dans le domaine fluide et la décroissance en  $R^{-2}$  pour  $R \rightarrow \infty$ .



Comme on l'a écrit plus haut, il est préférable, pour résoudre le problème, de se placer dans un référentiel lié au corps, soit  $OXYZ$ . On y projette les vecteurs vitesses en translation  $\vec{U}_0$  et en rotation  $\vec{\Omega}$  :

$$\vec{U}_0 = (U_1, U_2, U_3) \quad \vec{\Omega} = (U_4, U_5, U_6)$$

La condition de glissement (5.12) s'écrit :

$$\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^6 U_i(t) n_i$$

où

$$(n_1, n_2, n_3) = \vec{n} \quad (n_4, n_5, n_6) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{n}$$

Dans ce repère  $OXYZ$  les composantes  $n_i$  du vecteur normal généralisé ne dépendent pas de la variable temps. On est donc amené à rechercher une solution sous la forme :

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 U_i(t) \varphi_i$$

où les  $\varphi_i$  sont les solutions des six problèmes élémentaires, qui ne contiennent plus la variable  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} &= n_i && \text{sur } S \\ \Delta \varphi_i &= 0 && \text{dans le domaine fluide} \\ \nabla \varphi_i &\rightarrow 0 && \text{pour } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Il existe de nombreuses techniques numériques pour résoudre ce genre de problème, par exemple la méthode de l'équation intégrale.

Revenant à l'expression (5.9) des efforts, on a :

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^6 U_i(t) \iint_S \varphi_i \vec{n} dS \right]$$

où il faut tenir compte de ce que le vecteur normal  $\vec{n}$  change d'orientation au cours du temps :

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{n}$$

On obtient donc  $\vec{F}$  sous la forme :

$$\vec{F} = -\rho \sum_{i=1}^6 \frac{\partial U_i}{\partial t} \iint_S \varphi_i \vec{n} dS - \rho \vec{\Omega} \wedge \left[ \sum_{i=1}^6 U_i \iint_S \varphi_i \vec{n} dS \right] \quad (5.13)$$

Pour le moment  $\vec{C}$  on a de même :

$$\vec{C} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^6 U_i \iint_S \varphi_i \vec{r} \wedge \vec{n} dS \right]$$

où le vecteur  $\vec{r}$  est référencé au repère fixe  $oxyz$ , et s'écrit :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \overrightarrow{OP}(t)$$

de dérivée en temps :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U}_0(t) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Similairement on a :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{n}) = \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{n})$$

si bien que  $\vec{C}$  s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \vec{C} = & -\rho \sum_{i=1}^6 \frac{\partial U_i}{\partial t} \iint_S \varphi_i (\vec{r}_0 + \overrightarrow{OP}) \wedge \vec{n} dS \\ & -\rho \sum_{i=1}^6 U_i \iint_S \varphi_i \left[ \vec{U}_0 \wedge \vec{n} + \vec{r}_0 \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{n}) + \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{n}) \right] dS \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} \vec{C} = & \vec{r}_0 \wedge \vec{F} - \rho \sum_{i=1}^6 \frac{\partial U_i}{\partial t} \iint_S \varphi_i \overrightarrow{OP} \wedge \vec{n} dS \\ & -\rho \vec{U}_0 \wedge \left[ \sum_{i=1}^6 U_i \iint_S \varphi_i \vec{n} dS \right] - \rho \vec{\Omega} \wedge \left[ \sum_{i=1}^6 U_i \iint_S \varphi_i \overrightarrow{OP} \wedge \vec{n} dS \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

où l'on peut supprimer le premier terme  $\vec{r}_0 \wedge \vec{F}$  pour exprimer le moment par rapport au point  $O$  lié au corps.

On constate que les expressions (5.13) et (5.14) ne font intervenir que les vitesses  $U_i$  et leurs dérivées  $\partial U_i / \partial t = \dot{U}_i$  à l'instant considéré. Il n'y a aucun effet de mémoire de l'écoulement<sup>2</sup>. Il en ira autrement des problèmes potentiels à surface libre.

Elles font par ailleurs apparaître les quantités  $m_{ij}$  :

$$m_{ij} = \rho \iint_S \varphi_j n_i dS$$

ou, d'après la condition de glissement :

$$m_{ij} = \rho \iint_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS$$

Pour  $1 \leq i \leq 3$  et  $1 \leq j \leq 3$  les termes  $m_{ij}$  ont la dimension d'une masse, pour  $4 \leq i \leq 6$  et  $4 \leq j \leq 6$  celle d'une inertie. Les autres termes celle d'une masse  $\times$  une longueur. On appelle la matrice  $m_{ij}$  **matrice des masses et inerties ajoutées**. Cette matrice ne dépend que de la géométrie du corps. Une fois ses termes calculés les efforts hydrodynamiques s'obtiennent facilement par l'application des formules (5.13) et (5.14), qui donnent :

- Pour l'effort en translation :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 m_{1i} \dot{U}_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{2i} \dot{U}_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{3i} \dot{U}_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 m_{1i} U_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{2i} U_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{3i} U_i \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

- Pour le moment, exprimé par rapport au point  $O$  lié au corps :

$$\begin{pmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 m_{4i} \dot{U}_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{5i} \dot{U}_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{6i} \dot{U}_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 m_{1i} U_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{2i} U_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{3i} U_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^6 m_{4i} U_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{5i} U_i \\ \sum_{i=1}^6 m_{6i} U_i \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

On démontre facilement que la matrice de masses inerties ajoutées est symétrique. En effet :

$$m_{ij} - m_{ji} = \rho \iint_S \left( \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) dS$$

$$m_{ij} - m_{ji} = \rho \iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i - \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j) dv \equiv 0$$

(l'intégrale sur la surface de contrôle  $\Sigma$  à l'infini étant nulle).

Enfin on note que l'énergie cinétique du fluide se relie simplement à la matrice de masses et inerties ajoutées :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \Phi)^2 dv$$

ou :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \iint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

---

2. Ce qui implique, entre autres, que l'écoulement fluide cesse dès que le mouvement du corps s'arrête, résultat contraire à l'expérience que l'on a des fluides visqueux

Soit, comme  $\Phi = \sum_{i=1}^6 U_i \varphi_i$  :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 U_i U_j m_{ij} \quad (5.17)$$

### 5.3 Application au cas d'un mouvement plan

On va détailler les expressions obtenues pour les efforts dans le cas d'un mouvement dans le plan  $xy$ , réduit donc à deux translations ( $i=1, 2$ ) et à une rotation ( $i = 6$ ).

On considère d'abord les efforts en translation. L'application de (5.15) donne :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{i=1,2,6} m_{1i} \dot{U}_i \\ \sum_{i=1,2,6} m_{2i} \dot{U}_i \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sum_{i=1,2,6} m_{1i} U_i \\ \sum_{i=1,2,6} m_{2i} U_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les deux composantes  $F_1, F_2$  s'écrivent donc :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_{11} \dot{U}_1 + m_{12} \dot{U}_2 + m_{16} \dot{U}_6 \\ m_{21} \dot{U}_1 + m_{22} \dot{U}_2 + m_{26} \dot{U}_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -U_6 (m_{21} U_1 + m_{22} U_2 + m_{26} U_6) \\ U_6 (m_{11} U_1 + m_{12} U_2 + m_{16} U_6) \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Un cas d'application est la manoeuvrabilité des navires, dans le plan horizontal. Le domaine fluide en ce cas est semi-infini mais, les vitesses et accélérations étant faibles, il est licite d'assimiler la surface libre à un plan de symétrie. On parle alors de "double modèle".

Pour une carène symétrique babord tribord un mouvement de cavement (suivant l'axe longitudinal) n'induit aucun effort en embardée (suivant l'axe transversal) ni en lacet (rotation). On a donc  $m_{21} = m_{61} \equiv 0$  et par symétrie de la matrice de masses et inerties ajoutées  $m_{12}=m_{16}=0$ . Les composantes  $F_1$  et  $F_2$  se réduisent donc à :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{11} \dot{U}_1 + m_{22} U_6 U_2 + m_{26} U_6^2 \\ -m_{22} \dot{U}_2 - m_{26} \dot{U}_6 - m_{11} U_6 U_1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Le moment par rapport à l'axe vertical s'obtient de même en appliquant l'expression (5.16).

Considérant à nouveau le cas d'une carène symétrique par rapport au plan  $xz$  on obtient :

$$C_6 = -m_{26} \dot{U}_2 - m_{66} \dot{U}_6 - (m_{22} - m_{11}) U_1 U_2 - m_{26} U_6 U_1 \quad (5.20)$$

On constate l'apparition d'un moment,  $-(m_{22} - m_{11}) U_1 U_2$ , même si les accélérations et la vitesse en rotation sont nulles : le moment de Munk, déjà mentionné. Il a un effet déstabilisant et tend à orienter la carène en travers de la direction d'avance. En pratique les effets visqueux (friction, traînée, portance) ne peuvent pas être négligés dans l'étude de la

manœuvrabilité des navires. D'autres termes doivent être rajoutés aux expressions ci-dessus ; leur détermination est le plus souvent basée sur des approches empiriques (essais sur maquettes).

Dans l'application des expressions (5.15), (5.16), (5.18), (5.19), il ne faut pas perdre de vue que les  $U_i$  sont les composantes de la vitesse (absolue) dans le repère lié au solide. De même les  $F_i$  et  $C_i$  sont les composantes des efforts et moments dans le repère lié.

Si l'on souhaite exprimer vitesse et efforts par rapport au repère fixe, il faut donc passer d'un repère à l'autre. Toujours sur le cas de la manœuvrabilité, supposons données les composantes  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  de la vitesse du point  $O$  (le centre de gravité du navire par exemple) par rapport au repère fixe, et le cap du navire  $\psi(t)$ .

Les composantes  $U_1$  et  $U_2$  de la vitesse de translation sont alors :

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi \\ U_2 &= -u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi \end{aligned}$$

Les composantes  $F_1$  et  $F_2$  des efforts en translation, dans le repère lié, s'obtiennent en appliquant (5.19) :

$$\begin{aligned} F_1 &= -m_{11} \frac{d}{dt} (u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi) + m_{22} \dot{\psi} (-u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi) + m_{26} \dot{\psi}^2 \\ F_2 &= -m_{22} \frac{d}{dt} (-u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi) - m_{26} \ddot{\psi} - m_{11} \dot{\psi} (u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi) \end{aligned}$$

Leurs composantes  $f_1$  et  $f_2$  dans le repère fixe s'obtiennent par :

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1 \cos \psi - F_2 \sin \psi \\ f_2 &= F_1 \sin \psi + F_2 \cos \psi \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} f_1 &= -m_{11} \frac{d}{dt} [(u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi) \cos \psi] + m_{22} \frac{d}{dt} [(-u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi) \sin \psi] \\ &\quad + m_{26} \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \psi) \\ f_2 &= -m_{11} \frac{d}{dt} [(u_1 \cos \psi + u_2 \sin \psi) \sin \psi] - m_{22} \frac{d}{dt} [(-u_1 \sin \psi + u_2 \cos \psi) \cos \psi] \\ &\quad - m_{26} \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \cos \psi) \end{aligned}$$

## 5.4 Solide en évolution près d'une paroi

On considère le problème, illustré sur la figure 5.1, d'un solide en évolution près d'une paroi assimilée à un plan rigide infini, soit  $S_{pl}$ .

Si l'on repart de l'expression (5.7) établie pour les efforts en translation :

$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{n} dS \right] - \rho \iint_{\Sigma} \left( \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \vec{n} \right) dS \quad (5.7)$$

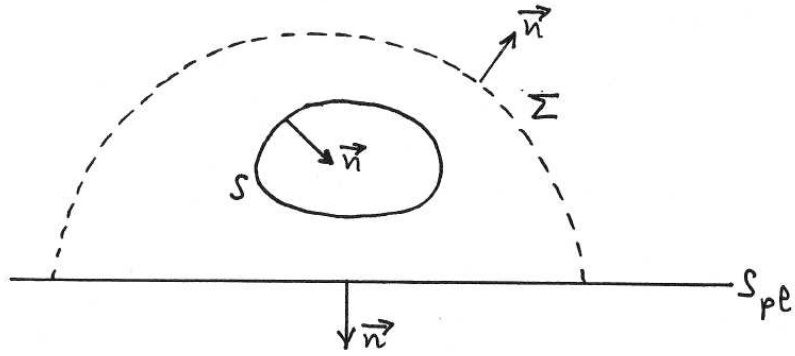


FIG. 5.1 – Corps en évolution près d'une paroi.

la différence tient à ce qu'une partie de la surface de contrôle  $\Sigma$ , le plan  $S_{pl}$ , ne peut être rejetée à l'infini. Le plan étant immobile, on a :

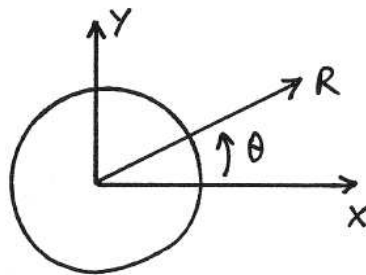
$$\vec{F} = -\rho \frac{d}{dt} \left[ \iint_S \Phi \vec{n} dS \right] + \frac{1}{2} \rho \iint_{S_{pl}} (\nabla \Phi)^2 \vec{n} dS$$

Un cas intéressant est celui où le solide est en translation uniforme, parallèlement à la paroi. En ce cas, dans le repère lié, la géométrie ne change pas et  $d/dt [\iint_S \Phi \vec{n} dS] \equiv 0$ .

Les efforts se réduisent au seul terme  $1/2 \rho \iint (\nabla \Phi)^2 \vec{n} dS$  qui représente un effort dirigé vers la paroi (le vecteur normal est orienté vers l'extérieur du domaine fluide). Le confinement conduit à des survitesses du côté de la paroi et donc à un effet de suction.

## 5.5 Masses ajoutées de formes simples

### 5.5.1 Cylindre circulaire



En coordonnées polaires  $(R, \theta)$  le potentiel  $\varphi_1$  correspondant à une vitesse unitaire suivant  $x$  est solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= 0 && \text{dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} &= \cos \theta && R = a \\ \nabla \varphi_1 &\rightarrow 0 && \text{pour } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$a$  étant le rayon.

La solution est :

$$\varphi_1 = -\cos \theta \frac{a^2}{R}$$

La masse ajoutée est alors donnée par :

$$m_{11} = \rho \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 \theta d\theta = \rho \pi a^2$$

La masse ajoutée d'un cylindre circulaire est donc égale à son déplacement.

### 5.5.2 Plaque plane

On a, au chapitre 4, obtenu par transformation conforme le potentiel complexe d'un écoulement sur une plaque plane, pour une vitesse à l'infini égale à  $U$  suivant  $y$  :

$$f(z) = -iU \sqrt{z^2 - b^2}$$

où les extrémités de la plaque ont pour coordonnées  $(-b, 0)$  et  $(b, 0)$ .

Dans un référentiel tel que le fluide soit au repos à l'infini le potentiel complexe devient :

$$f(z) = -iU \sqrt{z^2 - b^2} + iU z$$

la plaque étant alors en mouvement de vitesse  $-U$  suivant  $y$ .

Donc le potentiel réel  $\varphi_2$  correspondant à une vitesse unitaire suivant  $y$  est donné par :

$$\varphi_2 = \Re \left\{ i \sqrt{z^2 - b^2} - i z \right\}$$

soit, sur le côté supérieur ( $y = 0^+$ ) de la plaque :

$$\varphi_2 = -\sqrt{b^2 - x^2}$$

(on a la valeur opposée sur le dessous).

On en déduit la masse ajoutée  $m_{22}$  :

$$m_{22} = 2\rho \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - x^2} dx = \rho \pi b^2$$

On obtient donc la même masse ajoutée que pour le cercle circonscrit à la plaque.

En ce qui concerne l'inertie ajoutée en rotation, on établit qu'elle est égale à :

$$m_{66} = \frac{1}{8} \rho \pi b^4$$

### 5.5.3 Ellipse

Plus généralement on établit que pour une ellipse de demi-petit axe  $b$  (suivant  $y$ ) et de demi-grand axe  $a$  (suivant  $x$ ), les masses ajoutées  $m_{11}$  et  $m_{22}$  sont simplement données par :

$$m_{11} = \rho \pi b^2 \quad m_{22} = \rho \pi a^2$$

et l'inertie ajoutée en rotation  $m_{66}$  par

$$m_{66} = \frac{1}{8} \rho \pi (a^2 - b^2)^2$$

### 5.5.4 Rectangle

La figure 5.2 donne sous la forme  $m_{11}/(\rho\pi b^2)$  la masse ajoutée suivant  $x$  d'une forme rectangulaire de hauteur  $2b$  et longueur  $2a$ , en fonction du rapport longueur sur hauteur  $a/b$ .

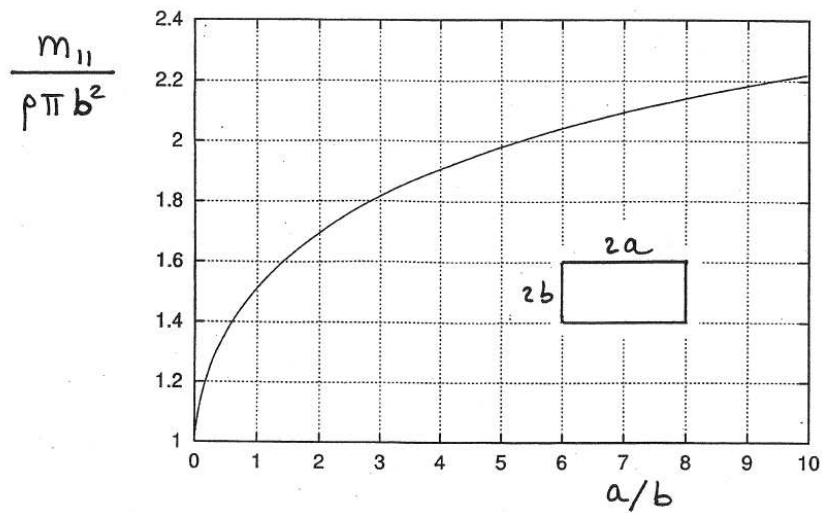


FIG. 5.2 – Coefficient de masse ajoutée de formes rectangulaires.

### 5.5.5 Sphère

Comme au paragraphe 3.4.3, où l'on avait étudié l'implosion d'une cavité sphérique, on se place en coordonnées sphériques définies par :

$$x = R \sin \theta \cos \phi \quad y = R \sin \theta \sin \phi \quad z = R \cos \theta$$

le Laplacien ayant alors pour expression :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

On considère la sphère en mouvement suivant l'axe  $z$ . La condition de glissement à satisfaire sur la sphère est alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \cos \theta \quad \text{pour } R = a$$

On fait l'hypothèse que le potentiel  $\varphi$  est de la forme :

$$\varphi(R, \theta) = f(R) \cos \theta$$

Le Laplacien s'écrit alors :

$$\Delta \varphi = \left( \frac{2}{R} f' + f'' - \frac{2}{R^2} f \right) \cos \theta$$

et  $f$  satisfait donc l'équation différentielle :

$$R^2 f'' + 2 R f' - 2 f = 0$$

Une solution du type  $\alpha R^n$  convient a priori. L'introduisant dans l'équation précédente on obtient :

$$n(n-1) + 2n - 2 = (n+2)(n-1) = 0$$

La condition de décroissance à l'infini impose  $n = -2$  et la condition de glissement permet de déterminer la constante  $\alpha$ . La solution est alors pour  $\varphi$  :

$$\varphi = -\frac{a^3}{2 R^2} \cos \theta$$

La masse ajoutée est finalement obtenue par :

$$M_a = \rho \int \int_S \frac{a}{2} \cos^2 \theta dS$$

où l'élément de surface est  $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ ,  $\phi$  variant de 0 à  $2\pi$  et  $\theta$  de 0 à  $\pi$  :

$$M_a = \rho \pi \int_0^\pi a^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \rho \pi a^3$$

La masse ajoutée d'une sphère est donc égale à la moitié de son déplacement.

A noter que, contrairement à ce que peut laisser supposer le cas bidimensionnel du cercle et de la plaque, la masse ajoutée d'un disque n'est pas égale à celle de la sphère circonscrite, mais à  $8/3 \rho a^3$ , où  $a$  est le rayon du disque.

# Chapitre 6

## Théorie linéarisée des profils portants minces

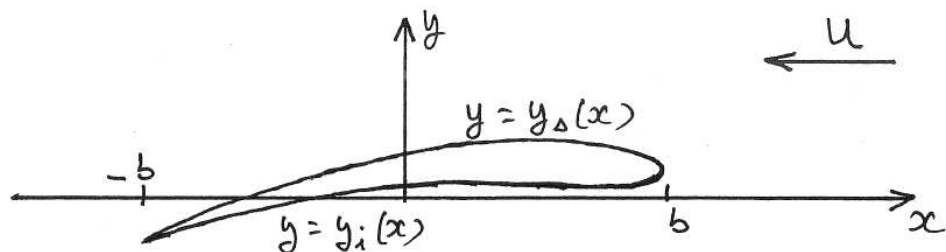
### 6.1 Introduction

On a vu, au chapitre 4, que la méthode de transformation conforme permet de calculer facilement les efforts de portance sur des profils, dits de Joukowski, qui se déduisent simplement de cercles. Dans le cas le plus général d'un profil donné de forme quelconque, il existe des techniques numériques pour déterminer les coefficients de la transformation conforme qui permet de le ramener à un cercle. Ces techniques ne sont pas forcément aisées de mise en œuvre et ne sont guère utilisées en pratique.

On va aborder ici une méthode différente, qui repose sur l'hypothèse que le profil est mince et perturbe peu l'écoulement. Elle met en œuvre des techniques classiques de l'aérodynamique et de l'hydrodynamique navale, à savoir la représentation du profil par des distributions de singularités élémentaires : sources et vortex. On va voir que cette méthode permet de lier simplement le coefficient de portance  $C_L$  au profil moyen, et qu'elle donne accès à une information localisée comme la distribution de pression. Un autre intérêt est son extension possible au tridimensionnel (que l'on n'abordera pas ici).

### 6.2 Position du problème

Soit un profil portant dont la projection sur l'axe horizontal couvre le segment  $[-b, b]$ . On désigne l'extrados par  $y = y_s(x)$  et l'intrados par  $y = y_i(x)$ . Ce profil est soumis à un écoulement uniforme de vitesse  $-U$  suivant l'axe  $x$ .



On suppose que le nombre de Reynolds est élevé, de sorte que la couche limite est très mince et peut être ignorée. On suppose aussi qu'elle est stable et que l'écoulement reste attaché au profil. Le seul effet notable de la viscosité est alors de générer une circulation  $\Gamma$  non nulle de manière à empêcher le contournement du bord de fuite que l'écoulement quitte tangentiellement. Il est donc justifié d'aborder la résolution du problème par une méthode potentielle, et de rechercher le potentiel des vitesses  $\Phi(x,y)$  sous la forme :

$$\Phi(x,y) = -U x + \varphi(x,y) \quad (6.1)$$

La condition de glissement s'écrit :  $\nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0$ , soit :

$$\nabla\varphi \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}$$

Le potentiel  $\varphi$  est donc solution du problème aux limites (6.2):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 && \text{dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} && \text{sur le profil} \\ \nabla\varphi &\neq \infty && \text{au bord de fuite} \\ \nabla\varphi &\rightarrow 0 && x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

### Condition de glissement

On considère par exemple l'extrados  $y - y_s(x) = 0$ . Le vecteur normal est :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{y_s'^2 + 1}} \begin{pmatrix} -y_s' \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur vitesse de l'écoulement:

$$\vec{V} = \nabla\Phi = \begin{pmatrix} -U + \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}$$

si bien que la condition de glissement s'écrit :

$$U y_s' - \varphi_x y_s' + \varphi_y = 0 \quad (6.3)$$

De même la condition de glissement sur l'intrados s'écrit :

$$U y_i' - \varphi_x y_i' + \varphi_y = 0 \quad (6.4)$$

La condition (6.3) étant affichée en  $y = y_s(x)$  et la condition (6.4) en  $y = y_i(x)$ .

### Linéarisation

On va simplifier les équations de glissement en exploitant l'hypothèse que le profil est mince et perturbe peu l'écoulement incident. Mathématiquement cela signifie que les pentes

$y'_s$  et  $y'_i$  sont petites devant 1 (en valeur absolue), si bien que  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont petits devant  $U$  (en valeur absolue). Il apparaît donc qu'on peut éliminer les termes  $-\varphi_x y'_s$  et  $-\varphi_x y'_i$  des équations (6.3) et (6.4) respectivement. On va pousser plus loin la simplification en affichant ces conditions, non plus sur le contour exact du profil, mais en  $y = 0^+$  pour l'extrados et  $y = 0^-$  pour l'intrados.

Le domaine d'application des résultats que l'on va obtenir via ces simplifications devra évidemment être vérifié a posteriori par comparaison avec des résultats expérimentaux, ou avec des résultats numériques basés sur la résolution du problème aux limites exact.

Les conditions de glissement (6.3) et (6.4) sont donc "linéarisées" en :

$$\varphi_y = -U y'_s \quad \text{en } y = 0^+ \quad (6.5)$$

$$\varphi_y = -U y'_i \quad \text{en } y = 0^- \quad (6.6)$$

### Séparation du potentiel en partie paire et partie impaire

On écrit :

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2} [\varphi(x,y) + \varphi(x, -y)] + \frac{1}{2} [\varphi(x,y) - \varphi(x, -y)] = \varphi_p(x,y) + \varphi_i(x,y)$$

La composante paire  $\varphi_p$  satisfait  $\varphi_p(x,y) = \varphi_p(x, -y)$ . En dehors de l'intervalle  $[-b, b]$  où  $\varphi$  présente une discontinuité on a  $\varphi_p(x,\epsilon) = \varphi_p(x, -\epsilon)$ , d'où  $\partial\varphi_p/\partial y = 0$  en  $y = 0$  pour  $|x| > b$ .

La composante impaire vérifie elle  $\varphi_i(x,y) = -\varphi_i(x, -y)$ , d'où l'on conclut que  $\varphi_i(x,0) = 0$  pour  $|x| > b$ .

En ce qui concerne les conditions vérifiées par  $\varphi_p$  et  $\varphi_i$  sur  $[-b, b]$ , on les obtient comme suit. Considérant d'abord  $\varphi_p$ , on a :

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, -y) \right]$$

D'où, pour  $y = 0^+$  :

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial y} = -\frac{1}{2} U (y'_s - y'_i)$$

Et pour  $y = 0^-$  :

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial y} = +\frac{1}{2} U (y'_s - y'_i)$$

En résumé :

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial y} = \mp \frac{1}{2} U (y'_s - y'_i) \quad \text{pour } -b < x < b \quad \text{et } y = 0^\pm \quad (6.7)$$

En procédant similairement, on obtient pour la composante impaire :

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = -\frac{1}{2} U (y'_s + y'_i) \quad \text{pour } -b < x < b \quad \text{et } y = 0^\pm \quad (6.8)$$

Comme le montrent la figure 6.1, on a décomposé le profil initial en un profil symétrique d'épaisseur  $y_s - y_i$ , auquel est associée la partie paire du potentiel  $\varphi$ , et un profil moyen  $1/2(y_s + y_i)$  sans épaisseur, auquel est associée la partie impaire du potentiel.

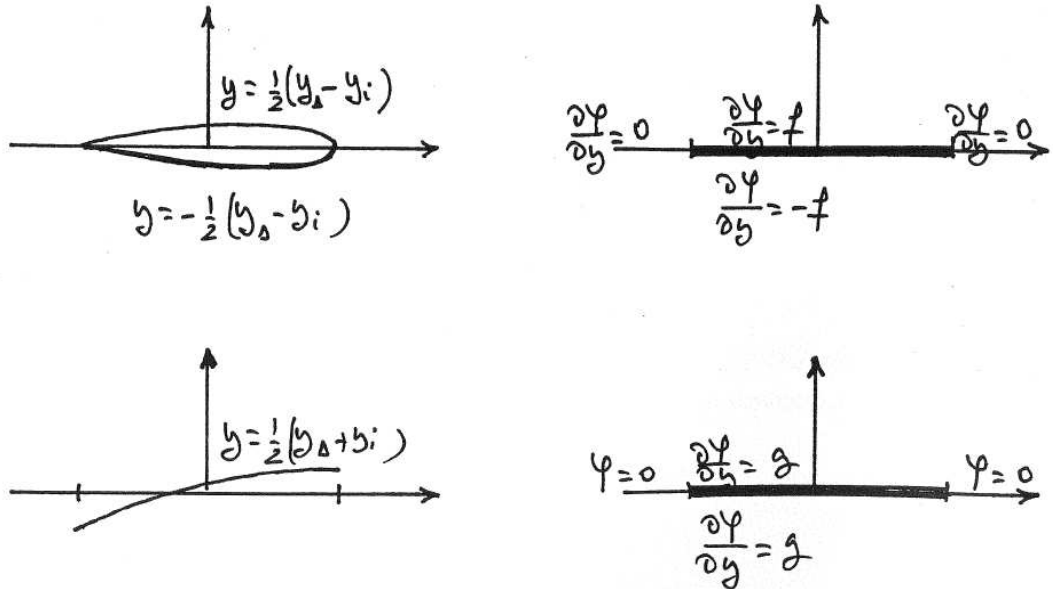


FIG. 6.1 – Illustration de la séparation en problème pair et impair.

### Effort de portance

On l'obtient par intégration du terme  $-1/2 \rho V^2$  de la relation de Bernoulli sur le profil idéalisé  $[-b b]$  :

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{-b}^b [(\varphi_x(x, 0^+) - U)^2 - (\varphi_x(x, 0^-) - U)^2] dx$$

soit, en négligeant les termes quadratiques en  $\varphi_x$  :

$$L = -\rho \int_{-b}^b [\varphi_x(x, 0^+) - \varphi_x(x, 0^-)] U dx = -\rho (-U) \Gamma \quad (6.9)$$

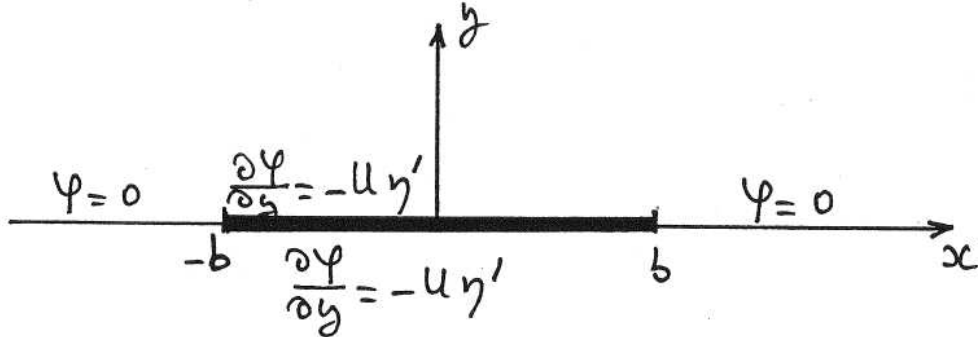
où  $\Gamma$  est la circulation autour du profil :

$$\Gamma = \int_{-b}^b [\varphi_x(x, 0^-) - \varphi_x(x, 0^+)] dx = \int_{-b}^b [\varphi_{ix}(x, 0^-) - \varphi_{ix}(x, 0^+)] dx \quad (6.10)$$

la circulation induite par la partie paire du potentielle étant nulle identiquement. Pour obtenir la portance il suffit donc de résoudre le problème impair.

### 6.3 Résolution du problème impair

La figure ci-dessous illustre le problème à résoudre :



où  $\eta(x) = \frac{1}{2} (y_s(x) + y_i(x))$ .

La dérivée en  $y$  de  $\varphi$  à travers le "profil"  $[-b, b]$  est continue. A priori la dérivée en  $x$  est discontinue. Cela suggère de représenter le profil par une distribution de tourbillons.

On rappelle que le potentiel complexe d'un tourbillon de circulation  $\Gamma$  centré en  $\xi + i0$  s'écrit :

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln(z - \xi)$$

les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse s'en déduisant par  $u - iv = f'(z)$ , soit :

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2}$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2}$$

On suppose donc une densité  $\gamma(\xi)$  de vorticité distrib e sur le segment  $[-b, b]$ . La vitesse induite a alors pour composantes :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi) y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (6.11)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi) (x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \quad (6.12)$$

On pourrait conclure, un peu hâtivement, de l'expression pour  $u$  que  $u(x, 0) \equiv 0$ . Il y a cependant un problème en  $\xi = x$  où l'intégrand est indéterminé. On considère donc la limite, pour  $\epsilon \rightarrow 0$ , de :

$$u(x, \epsilon) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi) \epsilon}{(x - \xi)^2 + \epsilon^2} d\xi$$

On fait l'hypothèse que  $\gamma(\xi)$  est continu au point  $x$ , si bien qu'il revient au même de considérer la valeur limite de :

$$u(x,\epsilon) = -\frac{1}{2\pi} \gamma(x) \int_{-b}^b \frac{\epsilon}{(x-\xi)^2 + \epsilon^2} d\xi$$

soit :

$$u(x,\epsilon) = -\frac{1}{2\pi} \gamma(x) \operatorname{Atg} \left. \frac{\xi-x}{\epsilon} \right]_{-b}^b$$

Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , on a  $\operatorname{Atg} \left. \frac{\xi-x}{\epsilon} \right]_{-b}^b \rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$  pour  $\epsilon > 0$ . Pour  $\epsilon < 0$  on a la valeur opposée  $-\pi$ .

Il vient donc, en fin de compte :

$$u(x,0^+) = -\frac{1}{2} \gamma(x) \quad (6.13)$$

$$u(x,0^-) = +\frac{1}{2} \gamma(x) \quad (6.14)$$

pour  $x \in [-b, b]$  et  $u(x,0) = 0$  en dehors.

$\gamma(x)$  représente donc le saut de vitesse, et la circulation  $\Gamma$  est simplement donnée par :

$$\Gamma = \int_{-b}^b \gamma(x) dx \quad (6.15)$$

La composante  $v$  de la vitesse sur le profil est elle donnée par :

$$v(x,0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi) (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \epsilon^2} d\xi = \frac{1}{2\pi} \operatorname{PV} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (6.16)$$

où  $\operatorname{PV} \int$  signifie l'intégrale en valeur principale :

$$\operatorname{PV} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-b}^{x-\epsilon} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi + \int_{x+\epsilon}^b \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \right\}$$

La distribution  $\gamma(\xi)$  de vortacité recherchée est alors solution de l'équation intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{PV} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi = v(x,0) = -U \eta'(x) \quad (6.17)$$

Dans le cas général ce type d'équation est résolu numériquement. Ici il est néanmoins possible d'exhiber une solution analytique (pour la démonstration, voir le paragraphe 6.5), qui s'écrit :

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}} \left[ \operatorname{PV} \int_{-b}^b \frac{-U \eta'(\xi) \sqrt{b^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi + \frac{\Gamma}{2} \right] \quad (6.18)$$

où l'on peut vérifier que  $\Gamma$  est bien la circulation totale  $\int_{-b}^b \gamma(x) dx$ .

---

On établit en effet facilement que :

$$\int_{-b}^b \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx = \pi$$

d'une part, et que :

$$\int_{-b}^b \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} \text{PV} \int_{-b}^b \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi \equiv 0$$

d'autre part (en permutant les intégrales et en passant dans le plan complexe). En d'autres termes le premier terme entre crochets dans (6.18) représente une solution particulière sans circulation, et le second correspond à la solution du problème homogène. On peut d'ailleurs la retrouver facilement à partir de la solution homogène pour le cercle qui est un simple vortex :

$$f(\zeta) = \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln \zeta$$

La transformation  $z = \zeta + b^2/4\zeta$  transforme le cercle de rayon  $b/2$  en la plaque  $[-b, b]$ . Dans le plan  $z$  le potentiel complexe est alors donné par :

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2i\pi} \ln \left( z + \sqrt{z^2 - b^2} \right)$$

et, par dérivation, la vitesse complexe s'écrit :

$$u - iv = \frac{\Gamma}{2i\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 - b^2}}$$

Pour  $y = 0$  et  $|x| < b$ , on obtient  $v \equiv 0$  et  $u = \pm \Gamma / (2\pi \sqrt{b^2 - x^2})$ , l'ambiguïté sur le signe étant levée, par exemple, par raccord des écoulements lointains dans les plans  $\zeta$  et  $z$ . On obtient alors :

$$u(x, 0^\pm) = \mp \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

et donc on vérifie que :

$$\gamma(x) = u(x, 0^-) - u(x, 0^+) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$


---

Il reste à déterminer  $\Gamma$ , ce que l'on fait en imposant la nullité du saut de vitesse horizontale en  $x = -b$ . On annule donc le terme entre crochets dans (6.18) pour  $x = -b$ , ce qui donne :

$$\Gamma = 2U \int_{-b}^b \frac{\eta'(\xi) \sqrt{b^2 - \xi^2}}{\xi + b} d\xi = 2U \int_{-b}^b \eta'(\xi) \sqrt{\frac{b - \xi}{b + \xi}} d\xi \quad (6.19)$$

D'où la vorticité  $\gamma(x)$  :

$$\gamma(x) = -\frac{2U}{\pi} \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \text{PV} \int_{-b}^b \frac{\eta'(\xi)}{\xi - x} \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi \quad (6.20)$$

Et la portance  $L$  :

$$L = 2\rho U^2 \int_{-b}^b \eta'(\xi) \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi \quad (6.21)$$

On a donc, au prix de développements quelque peu fastidieux, obtenu une expression extrêmement simple de la portance en fonction de la pente du profil moyen  $\eta(x) = (y_s(x) + y_i(x))/2$ .

Le grand intérêt de l'expression (6.21) est en fait de relier directement la portance à la pente  $\eta'$  du profil moyen. Dans l'intégrant la pente  $\eta'$  se trouve multipliée par le facteur  $\sqrt{(b-\xi)/(b+\xi)}$  qui amplifie fortement la contribution de la partie arrière du profil. Ce facteur est représenté sur la figure 6.1.

## 6.4 Applications

### 6.4.1 Plaque plane

Une application immédiate est le cas de la plaque plane en incidence, pour lequel  $\eta' = \alpha$ . On obtient alors :

$$L = 2 \rho U^2 \alpha \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi$$

soit :

$$L = 2 \pi \rho U^2 b \alpha$$

ou un coefficient de portance  $C_L$  :

$$C_L = 2 \pi \alpha \tag{6.22}$$

Par la méthode précédente de transformation conforme on avait obtenu  $2 \pi \sin \alpha$ . On retrouve donc bien la même valeur,  $\sin \alpha$  étant linéarisé en  $\alpha$ . Dans la mesure où les plans portants travaillent à incidence faible pour éviter le décrochage, la distinction entre  $\sin \alpha$  et  $\alpha$  importe peu.

On peut, à partir de (6.20), déterminer la distribution de vorticité pour la plaque plane. On établit en effet facilement, par intégration dans le plan complexe, que :

$$\text{PV} \int_{-b}^b \frac{1}{\xi - x} \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi = -\pi$$

Il vient donc :

$$\gamma(x) = 2 U \alpha \sqrt{\frac{b+x}{b-x}}$$

On obtient une allure inverse de celle représentée sur la figure 6.2, avec une valeur infinie au bord d'attaque. Physiquement cette singularité signifie que le point de stagnation amont ne se trouve pas à l'extrémité de la plaque, mais en dessous, et que l'écoulement contourne la pointe avec une vitesse infinie. En pratique la vitesse est atténuée du fait que l'extrémité est arrondie et d'épaisseur finie, mais les risques induits de séparation (et éventuellement de cavitation) sont importants.

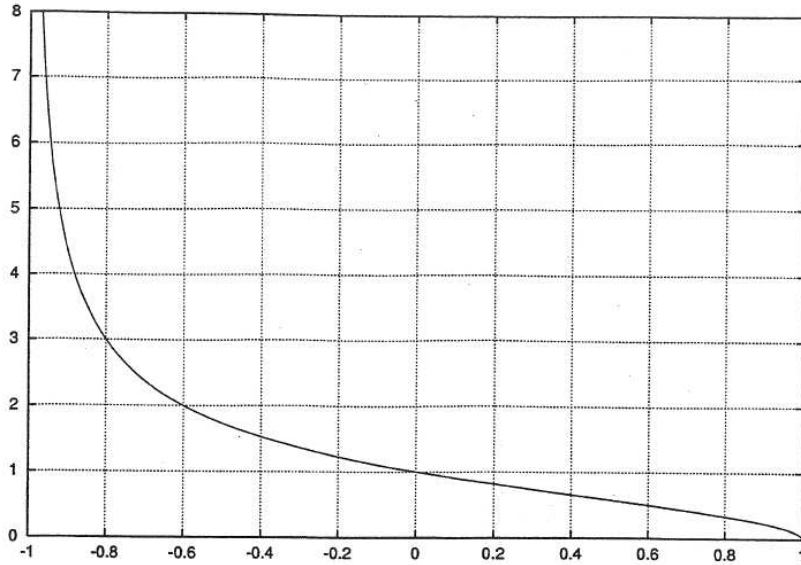
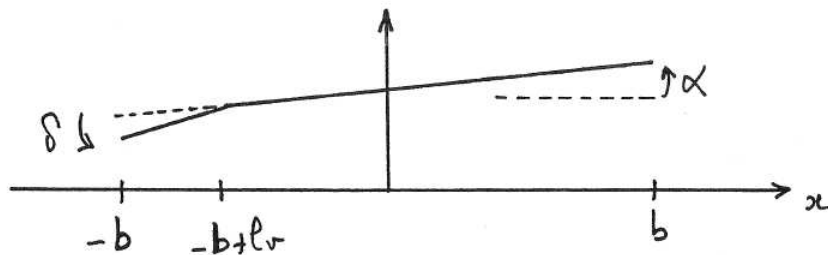


FIG. 6.2 -  $\sqrt{(b-\xi)/(b+\xi)}$  en fonction de  $\xi/b$ .

### 6.4.2 Efficacité d'un volet au bord de fuite

Soit, comme indiqué sur la figure, une plaque plane munie à l'arrière d'un volet de longueur  $l_v$  incliné d'un angle  $\delta$  par rapport à la plaque, elle-même à l'incidence  $\alpha$  par rapport à l'écoulement.



Appliquant (6.21), on écrit la portance sous la forme :

$$L = 2\rho U^2 \left\{ \int_{-b}^b \alpha \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi + \int_{-b}^{-b+l_v} \delta \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi \right\}$$

$$L = 2\rho U^2 \left\{ \alpha b \pi + \int_{-b}^{-b+l_v} \delta \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi \right\}$$

On suppose que le volet est court devant  $b$ . On peut donc utiliser l'approximation qui consiste à remplacer  $b - \xi$  par  $2b$  dans le numérateur de l'intégrant :

$$L \simeq 2\rho U^2 \left\{ \alpha b \pi + \int_{-b}^{-b+l_v} \delta \sqrt{\frac{2b}{b+\xi}} d\xi \right\}$$

dont l'intégration est immédiate et donne :

$$L \simeq 2 \rho U^2 b \left\{ \pi \alpha + 4 \delta \sqrt{\frac{l_v}{2b}} \right\} \quad (6.23)$$

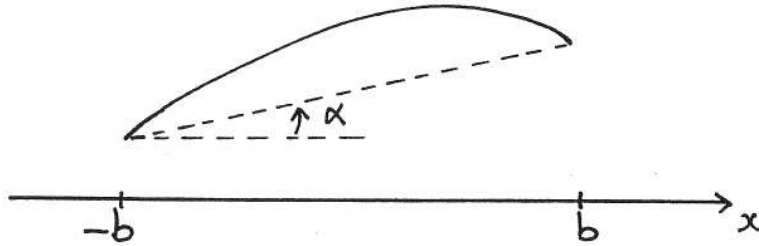
Par exemple, si le volet fait 10 % de la corde ( $l_v = 0.2 b$ ), on a :

$$L \simeq 2 \rho U^2 b \{ \pi \alpha + 1.26 \delta \}$$

et donc le volet est 40 % aussi efficace que la plaque entière.

### 6.4.3 Angle de portance nulle

Les deux cas traités ci-dessus (plaque plane et plaque plane avec volet) s'appliquent à la plupart des profils portants rencontrés sur les navires : safrans, ailerons, etc., qui travaillent indifféremment d'un côté ou de l'autre. En aérodynamique l'effort de portance a une direction privilégiée (vers le haut), et on peut davantage jouer sur l'asymétrie du profil. En hydrodynamique navale, une situation similaire se présente pour les foils. On va voir qu'on peut alors mieux répartir l'effort de portance le long du profil, et retarder les problèmes de séparation et cavitation.



Quelle que soit la forme du profil moyen, on peut le représenter par :

$$\eta(\xi) = \alpha (\xi + b) + \tilde{\eta}(\xi)$$

avec :

$$\tilde{\eta}(-b) = \tilde{\eta}(b) = 0$$

On sépare ainsi les effets de la forme propre du profil et de son inclinaison. La portance s'exprime alors par :

$$L = 2 \rho U^2 \left\{ \int_{-b}^b \tilde{\eta}'(\xi) \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi + \alpha b \pi \right\}$$

ou :

$$L = 2 \rho U^2 b \pi (\alpha - \alpha_0) \quad (6.24)$$

où  $\alpha_0$  est l'angle de portance nulle donné par :

$$\alpha_0 b \pi = - \int_{-b}^b \tilde{\eta}'(\xi) \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi \quad (6.25)$$

### Cas d'un profil parabolique

On considère à titre d'exemple le profil :

$$\tilde{\eta}(\xi) = k \left( b - \frac{\xi^2}{b} \right)$$

On a alors :

$$\alpha_0 = \frac{2k}{b^2 \pi} \int_{-b}^b \xi \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi$$

L'intégrale se calcule aisément par le changement de variable  $\xi = b \cos \theta$  qui conduit à :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2k}{b^2 \pi} \int_0^\pi b^2 \cos \theta \sin \theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\ \alpha_0 &= \frac{2k}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta (1 - \cos \theta) d\theta \\ \alpha_0 &= \frac{2k}{\pi} \frac{-\pi}{2} = -k \end{aligned}$$

Si on prend par exemple  $k = 0.1$ , on obtient un angle égal à  $-6$  degrés.

### 6.4.4 Angle d'incidence idéal

On rappelle l'expression (6.20) obtenue pour la distribution de vorticité sur le profil :

$$\gamma(x) = -\frac{2U}{\pi} \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \operatorname{PV} \int_{-b}^b \frac{\eta'(\xi)}{\xi-x} \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi$$

soit, si  $\eta = \tilde{\eta} + \alpha (\xi + b)$  :

$$\gamma(x) = -\frac{2U}{\pi} \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \left\{ \operatorname{PV} \int_{-b}^b \frac{\tilde{\eta}'(\xi)}{\xi-x} \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} d\xi + \alpha \operatorname{PV} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b-\xi}{b+\xi}} \frac{d\xi}{\xi-x} \right\}$$

la deuxième intégrale en valeur principale étant égale à  $-\pi$ .

D'après cette expression, il apparaît que  $\gamma$  est infini en  $x = b$ , soit au bord d'attaque. Cela signifie des survitesses locales très importantes, avec des risques induits de décollement de la couche limite et, dans l'eau, de cavitation. Un remède pour éviter ces désagréments est d'opérer à une incidence  $\alpha_i$  telle que le terme entre crochets soit nul pour  $x = b$ . Ce critère conduit à la valeur :

$$\alpha_i = -\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\tilde{\eta}'(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi \quad (6.26)$$

(ce qui implique  $\alpha_i = 0$  si le profil est symétrique avant-arrière ;  $\eta(\xi) = \eta(-\xi)$ ).

La portance est alors donnée par :

$$L = 2 \rho U^2 b \pi (\alpha_i - \alpha_0)$$

soit :

$$L = -2 \rho U^2 \int_{-b}^b \frac{\xi \tilde{\eta}'(\xi)}{\sqrt{b^2 - \xi^2}} d\xi \quad (6.27)$$

Plutôt que (6.21), c'est cette expression qui donne la portance effective d'un profil de forme  $\tilde{\eta}$  donnée.

**Exercice:** calculer  $\alpha_0$  et  $\alpha_i$  pour  $\tilde{\eta}(\xi) = \frac{k}{3b^2} (\xi - 3b) (\xi^2 - b^2)$ . Comparer au cas parabolique.

### 6.4.5 Profils NACA (série a)

On peut pousser plus loin cette analyse et dire que le meilleur profil, du point de vue des problèmes de stabilité de la couche limite et de cavitation, est celui qui assure une valeur de  $\gamma$  constante de  $-b$  à  $+b$ . Cela offre aussi l'intérêt d'une distribution de pression constante le long du profil.

Ce profil s'obtient aisément à partir de l'équation intégrale (6.17) qui lie  $\gamma(\xi)$  à  $\eta'(x)$  :

$$\frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi = -U \eta'(x)$$

Faisant  $\gamma(\xi) = \text{cte} = K 2\pi U$  on en déduit :

$$\eta'(x) = K \ln \left| \frac{b-x}{b+x} \right| \quad (6.28)$$

Soit :

$$\eta(x) = -K \left\{ (b+x) \ln \left( 1 + \frac{x}{b} \right) + (b-x) \ln \left( 1 - \frac{x}{b} \right) - 2b \ln 2 \right\} \quad (6.29)$$

Le défaut de cette solution est de donner un profil avec des pentes infinies au bord d'attaque et au bord de fuite. La singularité au bord d'attaque n'est pas vraiment un problème car elle est compensée par les effets d'épaisseur. Par contre la pente infinie au bord de fuite contredit sérieusement l'hypothèse que l'écoulement quitte le profil sans perturbation. De fait la condition de Kutta-Joukowski implique que  $\gamma$  soit nul au bord de fuite, et c'est cette condition qui permet de fixer la circulation.

Il apparaît donc nécessaire de relaxer la condition que  $\gamma$  est constant et non nul, au moins au voisinage du bord de fuite. Les profils NACA sont basés sur cette idée, et sur une valeur constante de  $\gamma$  du bord d'attaque jusqu'à un certain point du profil, suivie d'une décroissance linéaire jusqu'à zéro en  $x = -b$ . La figure 6.3 illustre différentes distributions possibles de la vorticité, et les formes de profil correspondantes. La valeur  $a = 0.8$  (c'est à dire  $\gamma$  constant sur 80 % du profil) correspond aux formes les plus courantes.

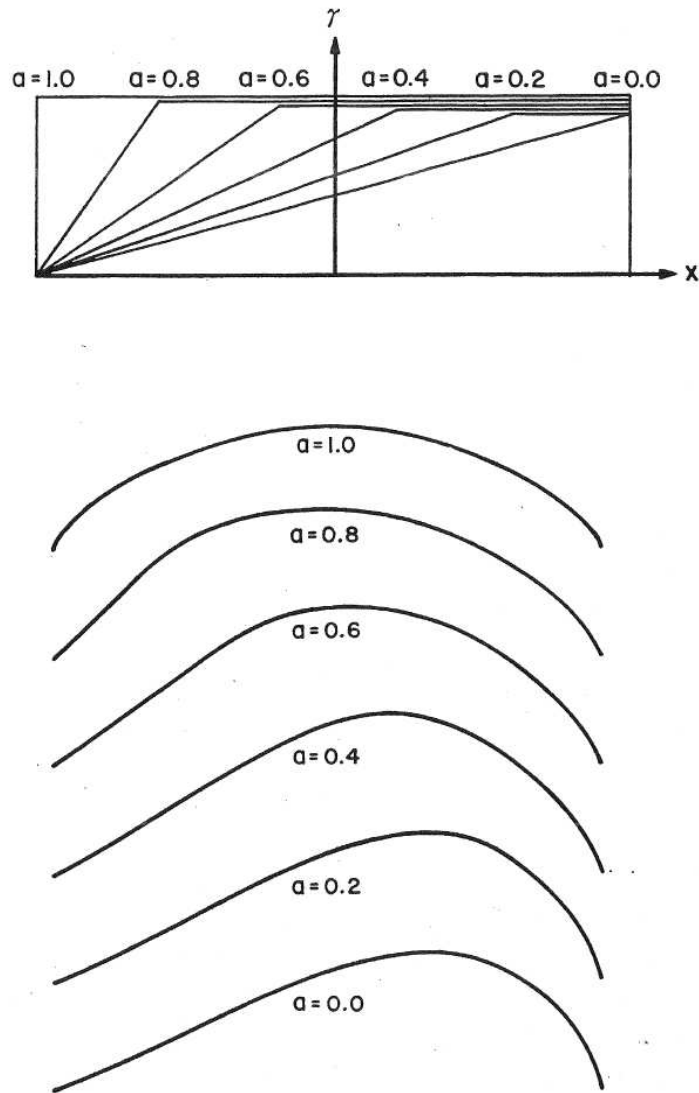


FIG. 6.3 – Profils NACA. Distributions de vorticités (haut) et profils correspondants.

## 6.5 Résolution simultanée des problèmes d'épaisseur et de portance

Au paragraphe précédent on a négligé le problème d'épaisseur qui, s'il conduit à la même vitesse longitudinale sur l'intrados et l'extrados et donc ne participe pas aux effets de portance, n'en a pas moins des effets sur la vitesse totale et doit être pris en compte, par exemple pour l'étude des problèmes de décollement de couche limite et de cavitation. On a aussi donné la solution (6.18) de l'équation intégrale (6.17) sans la justifier.

De fait les deux problèmes : portance et épaisseur sont parents et la résolution du problème de portance s'inspire de celle, beaucoup plus aisée, du problème d'épaisseur.

On rappelle que le potentiel complexe d'une source ponctuelle est  $Q/(2\pi) \ln(z - \xi)$ , si bien que la vitesse complexe induite par une distribution de sources et de vortex sur le profil

s'écrit :

$$u(z) - i v(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b [q(\xi) - i \gamma(\xi)] \frac{d\xi}{\xi - z} \quad (6.30)$$

Lorsque le point  $z$  se rapproche d'un point  $x$  du segment  $[-b, b]$ , l'intégrale devient singulière et doit être interprétée soigneusement. Si  $z$  approche  $x$  par le haut ( $y > 0$ ), le contour d'intégration passe sous le pôle et une demi fois le résidu doit être ajoutée à l'intégrale en valeur principale. Si  $z$  approche  $x$  par le bas ( $y < 0$ ), le contour passe au dessus et  $-1/2$  fois le résidu doit être ajoutée. En conclusion :

$$(u - i v)(x \pm i 0) = -\frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-b}^b [q(\xi) - i \gamma(\xi)] \frac{d\xi}{\xi - x} \mp \frac{i}{2} [q(x) - i \gamma(x)] \quad (6.31)$$

Pour la distribution de vortex on retrouve les mêmes expressions des composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse qu'au paragraphe 6.2.2. Pour la distribution de sources on obtient comme vitesse induite :

$$u(x, 0^\pm) = -\frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-b}^b \frac{q(\xi)}{\xi - x} d\xi \quad v(x, 0^\pm) = \pm \frac{1}{2} q(x) \quad (6.32)$$

Par rapport à la distribution de vortex, les rôles entre  $u$  et  $v$  sont en quelque sorte permutés. Cela se comprend aisément puisqu'une source induit une vitesse radiale : la composante perpendiculaire au profil n'est donc liée qu'à la densité locale de source ; par contre la composante longitudinale dépend de la contribution de toutes les sources élémentaires le long du profil.

Il en résulte que la résolution du problème d'épaisseur est immédiate, puisque la condition de glissement (6.7) donne la densité de source :

$$q(x) = -U [y'_s(x) - y'_i(x)] \quad (6.33)$$

La figure suivante illustre les différences mathématiques entre les deux problèmes.



Pour le problème d'épaisseur la composante  $v$  de la vitesse est impaire, et  $v$  est une donnée sur tout l'axe horizontal :  $v = 0$  en dehors de  $[-b, b]$  et  $v = \pm f$  sur  $[-b, b]$ . A l'inverse pour le problème de portance, c'est la composante  $u$  qui est antisymétrique, et  $u = 0$  en dehors de  $[-b, b]$ , alors que  $v = g$  sur  $[-b, b]$ . Les conditions aux limites sur l'axe longitudinal impliquent donc à la fois  $u$  et  $v$  et c'est cette mixité qui pose problème.

On peut alors imaginer un artifice pour résoudre le problème de portance qui consiste à considérer la pseudo-vitesse complexe  $\tilde{u} - i \tilde{v}$  définie par :

$$\tilde{u} - i \tilde{v} = \sqrt{b^2 - z^2} (u - i v)$$

Sur  $[-b, b]$  la racine carrée est réelle et  $\tilde{v} = \sqrt{b^2 - x^2} g$ .

En dehors de  $[-b, b]$  la racine carrée est imaginaire et  $\tilde{v} = \pm\sqrt{x^2 - b^2} u \equiv 0$ .

Le problème tilde est donc identique au problème d'épaisseur et sa solution est :

$$\tilde{q}(x) = 2\sqrt{b^2 - x^2} g = -2\sqrt{b^2 - x^2} U \eta'(x)$$

La pseudo-vitesse induite est alors :

$$\tilde{u}(z) - i\tilde{v}(z) = \frac{U}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\eta'(\xi) \sqrt{b^2 - \xi^2}}{\xi - z} d\xi$$

Soit pour la vitesse réelle  $u - iv$  dans le plan  $y > 0$  :

$$u(z) - iv(z) = \frac{U}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - z^2}} \int_{-b}^b \frac{\eta'(\xi) \sqrt{b^2 - \xi^2}}{\xi - z} d\xi$$

Pour  $x \in [-b, b]$  on a alors :

$$u(x, 0^+) = \frac{U}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}} \text{PV} \int_{-b}^b \frac{\eta'(\xi) \sqrt{b^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi$$

et donc pour la distribution de vortex  $\gamma$  :

$$\gamma(x) = -2u(x, 0^+) = -\frac{2U}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}} \text{PV} \int_{-b}^b \frac{\eta'(\xi) \sqrt{b^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi$$

On a ainsi retrouvé la solution particulière (sans circulation) donnée en (6.18). Il reste à ajouter la solution homogène et à satisfaire la condition de Kutta-Joukowski pour obtenir la solution finale.

# Annexe A

## Formulaire mathématique

Cette annexe est empruntée à des notes de cours de Pierre Guével.

### A.1 Rappel des formules de l'analyse vectorielle

Soit deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

#### A.1.1 Produit scalaire

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

#### A.1.2 Produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ A_3 B_1 - A_1 B_3 \\ A_1 B_2 - A_2 B_1 \end{pmatrix}$$

#### A.1.3 Produit mixte

Pour trois vecteurs  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

#### A.1.4 Gradient

Soit une grandeur scalaire  $f(x,y,z)$ .

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

## Gradient d'un produit

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

### A.1.5 Divergence

Soit un champ vectoriel  $\vec{V}$  :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = u_x + v_y + w_z$$

### Divergence d'un produit scalaire $\times$ vecteur

$$\operatorname{div}(f \vec{V}) = f \operatorname{div} \vec{V} + \nabla f \cdot \vec{V}$$

### A.1.6 Rotationnel

$$\operatorname{Rot} \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

### Rotationnel d'un produit scalaire $\times$ vecteur

$$\operatorname{Rot}(f \vec{V}) = f \operatorname{Rot} \vec{V} + \nabla f \wedge \vec{V}$$

### A.1.7 Laplacien

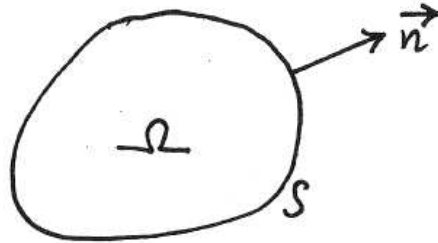
$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

### Laplacien en coordonnées cylindriques $(R, \theta, z)$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f_{RR} + \frac{1}{R} f_R + \frac{1}{R^2} f_{\theta\theta} + f_{zz}$$

## A.2 Formules de transformation des intégrales vectorielles

### A.2.1 Transformation des intégrales de surface en intégrales de volume



$\vec{n}$ , vecteur unitaire de la normale **extérieure**.

**Formule d'Ostrogradsky**

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, d\Omega$$

**Formule du gradient**

$$\iint_S f \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \nabla f \, d\Omega$$

**Formule du rotationnel**

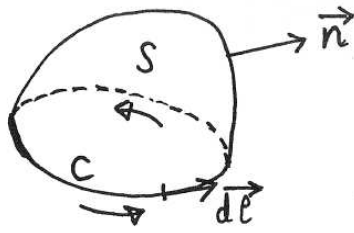
$$\iint_S (\vec{n} \wedge \vec{V}) \, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{Rot} \vec{V} \, d\Omega$$

**Deuxième formule de Green**

$$\iint_S [\varphi \nabla \psi \cdot \vec{n} - \psi \nabla \varphi \cdot \vec{n}] \, dS = \iiint_{\Omega} [\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi] \, d\Omega$$

### A.2.2 Transformation des intégrales curvilignes en intégrales de surface

Le sens de parcours sur  $C$  étant choisi arbitrairement, la normale  $\vec{n}$  à  $S$  est orientée conformément à la règle d'Ampère.



**Formule de Stokes**

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{Rot } \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

**Formule du gradient**

$$\int_C f d\vec{l} = \iint_S (\vec{n} \wedge \nabla f) dS$$